Fourier-Inversion (Teil 1)

Martin Lohmann, Lars Kühne

22. Oktober, 2007

Zusammenfassung

Dass wir jedem $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine Fourier-Transformierte zuweisen können, ist eine wohlbekannte Tatsache. Die Frage nach der Umkehrbarkeit der Fourier-Transformation gibt uns jedoch deshalb schon Probleme auf, weil wir über die Integrabilität von $\hat{f}$ im Allgemeinen keine Aussagen machen können.

Mithilfe einer Glättung von $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ durch Faltung mit einer Gaussfunktion gibt es jedoch einen Weg, eine Inversion der Fouriertransformation anzugeben. Wesentlich ist dabei, dass man den Begriff der Lebesque-Integrierbarkeit durch die Gauss-Summierbarkeit erweitert, indem man noch einen zusätzlichen Approximationsprozess einführt. In diesem ersten Vortrag werden wir uns jedoch darauf beschränken, nur ein Konvergenzresultat über die Gauss-Mittel in der L^1-Norm zu zeigen.

Die Fourier-Transformation

Zuerst repetieren wir jedoch einige wichtige Grundlagen aus der L^1-Theorie der Fourier-Transformation.

Definition. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sei*

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi i x \cdot t}dt$$

die Fourier-Transformierte von f.

Die Zuordnung $f \to \hat{f}$ ist offenbar linear, ferner folgert man unmittelbar aus der Definition:

Bemerkung 1. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt*

1. $||\hat{f}||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^1}$.
2. *$\hat{f}(x)$ ist gleichmässig stetig in $x \in \mathbb{R}^n$.*

Weniger trivial und auf einem Dichtheitsargument basierend ist der Beweis von:

Satz 2. (Riemann-Lebesque) *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\lim_{|x|\to\infty} \hat{f}(x) = 0$.*
Wegen Bemerkung 1.2 gilt damit sogar $\hat{f} \in \mathcal{C}_0^0$, d.h. $\hat{f}(x)$ gehört zu den stetigen Funktionen, die "im Unendlichen" verschwinden.

Beweis: Sei zunächst $f = \chi_Q$, wobei $Q = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$, $|a_j|, |b_j| \neq \infty$. Dann gilt

$$\hat{f}(x) = \int_Q e^{-2\pi i x\cdot t} dt = \prod_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} e^{-2\pi i x_j \cdot t_j} dt_j.$$

Sei nun $x \neq 0$ und $|x_{j_0}| = ||x||_\infty \neq 0$, dann gilt

$$\left| \int_{a_{j_0}}^{b_{j_0}} e^{-2\pi i x_{j_0}\cdot t_{j_0}} dt_{j_0} \right| = \left| \left[\frac{-1}{2\pi i x_{j_0}} \cdot e^{-2\pi i x_{j_0}\cdot t_{j_0}} \right]_{a_{j_0}}^{b_{j_0}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|x_{j_0}|} \cdot 2 = \frac{1}{\pi \cdot ||x||_\infty}.$$

Ferner ist für beliebiges j ja $\left| \int_{a_j}^{b_j} e^{-2\pi i x_j\cdot t_j} dt_j \right| \leq (b_j - a_j)$ und damit gilt für $x \neq 0$:

$$\left| \hat{f}(x) \right| \leq \frac{1}{\pi \cdot ||x||_\infty} \cdot \prod_{j=1}^n \max\{1, (b_j - a_j)\}.$$

Die Behauptung des Satzes für f folgt nun unmittelbar.

Wegen der Linearität von $f \to \hat{f}$ ergibt sich daraus die Behauptung für beliebiges $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{Q_j}$, wobei die Q_j beliebige Quader (endlichen Volumens) sind.
Sei nun $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ beliebig: Weil die (endlichen) Linearkombinationen charakteristischer Funktionen von Quadern dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegen[1], gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $g = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{Q_j}$ mit $||f - g||_{L^1} < \epsilon$. Wegen Bemerkung 1.1 gilt dann auch $||\hat{f} - \hat{g}||_{L^\infty} < \epsilon$. Daraus folgt mithilfe unseres ersten Beweisteils

$$\limsup_{|x|\to\infty} |\hat{f}(x)| \leq \limsup_{|x|\to\infty} |\hat{f}(x) - \hat{g}(x)| + \lim_{|x|\to\infty} |\hat{g}(x)| < \epsilon.$$

Da ϵ beliebig gewählt werden kann, folgt $\lim_{|x|\to\infty} \hat{f}(x) = 0$. □

Ferner notieren und beweisen wir noch einige technische Eigenschaften:

Satz 3. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $t_k \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, t_k die k-te Koordinatenfunktion. Dann ist $\hat{f}$ partiell nach x_k differenzierbar und*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}(x) = \left(-2\pi i t_k f(t)\right)^\wedge (x).$$

Beweis: Sei $h_j \to 0$ für $j \to \infty$, dann gilt

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}(x) = \lim_{j\to\infty} \frac{\hat{f}(x + h_j \cdot e_k) - \hat{f}(x)}{h_j} = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \cdot e^{-2\pi i x\cdot t} \cdot \frac{\left(e^{-2\pi i h_j \cdot t_k} - 1\right)}{h_j} dt \; .$$

[1] Für einen Beweis siehe M. Struwe, Analysis III Skript, Satz 3.5.2

Da

$$\left| f(t) \cdot e^{-2\pi i x\cdot t} \cdot \frac{\left(e^{-2\pi i t_k \cdot h_j} - 1\right)}{h_j} \right| \leq |f(t)| \cdot \max_{0\leq \xi \leq h_j} \left|(-2\pi i t_k) \cdot e^{-2\pi i t_k \cdot \xi}\right| \leq 2\pi |t_k \cdot f(t)|$$

ist $2\pi \cdot |t_k \cdot f|$ eine gleichmässige integrable Majorante für die Integranden im letzten Limes. Daher liefert der Satz von Lebesque, dass

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \cdot e^{-2\pi i x\cdot t} \cdot (-2\pi i t_k)\, dt \ = \left(-2\pi i t_k f(t)\right)^\wedge (x).$$

□

Satz 4. *Seien f und g in $L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$.*

Beweis: Mit dem Satz von Fubini und der Translationsinvarianz des Lebesque-Integrals folgt

$$\begin{aligned}
(f * g)^\wedge(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(t-y) dy \right) \cdot e^{-2\pi i x \cdot t} dt \ = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot y} f(y) g(t-y) e^{-2\pi i x\cdot (t-y)} d(t,y) \ = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i x\cdot y} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(t-y) e^{-2\pi i x \cdot (t-y)} dt \right) dy = \hat{f}(x)\hat{g}(x).
\end{aligned}$$

Abschliessend erörtern wir noch kurz die Beziehung zwischen der Aktion der Translationsgruppe auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ und der Fouriertransformation. Für $h \in \mathbb{R}^n$ sei dabei $\tau_h : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ der Translationsoperator, d.h. für $f \in L^1$ gilt $\tau_h(f)(t) = f(t-h)$.

Bemerkung 5. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $h \in \mathbb{R}^n$ gilt*

1. $(\tau_h f)^\wedge(x) = e^{-2\pi i x\cdot h}\hat{f}(x)$,
2. $(e^{2\pi i h\cdot t} f(t))^\wedge(x) = (\tau_h \hat{f})(x)$.

Beweis: 1. Man beachte, dass wegen der Translationsinvarianz

$$(\tau_h f)^\wedge(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t-h) \cdot e^{-2\pi i x\cdot t} dt = e^{-2\pi i x \cdot h} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(t-h) e^{-2\pi i x\cdot(t-h)} dt = e^{-2\pi i x\cdot h}\hat{f}(x).$$

2. Analog gilt:

$$(e^{2\pi i h\cdot t} f(t))^\wedge(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i h \cdot t} f(t) e^{-2\pi i x\cdot t} dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i (x-h)\cdot t} dt = \hat{f}(x-h).$$

□

Die Fourier-Inversion

Bei der Suche nach einer Inversionsformel kommt man relativ schnell auf den Ansatz

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{2\pi i t \cdot x} dx \; .$$

Denn falls $\hat{f}$ in L^1 liegt, so liefert der Satz von Fubini unmittelbar, dass dieses Integral mit $f(t)$ übereinstimmt. Schlechter stellt sich die Situation dar, wenn $\hat{f}$ nicht in L^1 liegt. Dann nämlich muss das Integral nicht einmal wohldefiniert sein.

Leider tritt aber gerade dies bei vielen Anwendungen auf. Nach dem Satz von Riemann-Lebesque liegt zwar die Funktion $\hat{f}$ stets in $\mathcal{C}_0^0$ und hat damit insbesondere keine Singularitäten, trotzdem fällt sie im Allgemeinen nur sehr langsam ab und ist deshalb nicht integrabel.

Einen Ausweg bietet hier die Glättung von f durch Faltung mit geeignet gewählten Funktionen φ_ϵ. Dieser Ansatz wird plausibel, wenn man bedenkt, dass die Glattheitseigenschaften einer Funktion massgeblich das Abfallen ihrer Fourier-Transformierten im Unendlichen bestimmen.

Dies ist nun auch der richtige Zeitpunkt, einen Überblick über unsere weitere Vorgehensweise zu geben: Zur Faltung verwenden wir die Gaussfunktion, die wir wie folgt definieren:

Definition. *Die durch*

$$\varphi(x) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \cdot e^{\frac{-|x|^2}{4}}$$

gegebene Funktion auf $\mathbb{R}^n$ *heisse (n-dimensionale) Gaussfunktion.*

Wir werden zeigen, dass die Normierung von $\varphi(x)$ gerade so gewählt ist, dass die L^1-Norm von φ gleich 1 ist. Dann definieren wir weiter die Funktionen $\varphi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$, die ebenfalls alle auf 1 normiert sind. In Satz 8 werden wir darüber hinaus zeigen, dass es bezüglich der L^1-Norm zu einer Konvergenz von $f * \varphi_\epsilon$ gegen f kommt.

Auf der anderen Seite werden wir einen Zusammenhang zwischen $f * \varphi_\epsilon$ und $\hat{f}$ ableiten. Dabei benutzen wir die Tatsache, dass die Fouriertransformierte der Gaussfunktion bis auf Skalierung und Normierung wieder eine Gaussfunktion ist.

Bevor wir allerdings mit der Umformung von $f * \varphi_\epsilon$ anfangen können, müssen wir erstmal unsere Behauptungen über die Gaussfunktion beweisen:

Bemerkung 6. *Es gilt*

1. $\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x|^2}{4}} dx = (4\pi)^{n/2}$, *d.h.* $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$,

2. $(e^{-4\pi^2\epsilon|t|^2})^\wedge(x) = \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{n/2}} \cdot e^{\frac{-|x|^2}{4\epsilon}}$,

3. $y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (e^{2\pi i y \cdot t} \cdot e^{-4\pi^2\epsilon|t|^2})^\wedge(x) = \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{n/2}} \cdot e^{\frac{-|x-y|^2}{4\epsilon}}$.

Beweis: 1. Es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x|^2}{4}} dx = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-x_i^2}{4}} dx_i = \prod_{i=1}^n 2 \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = 2^n \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du \right)^n = 2^n \cdot \pi^{\frac{n}{2}} = (4\pi)^{\frac{n}{2}},$$

wobei wir die aus der Analysis wohlbekannte Rechnung

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = (2\pi) \cdot \int_{[0;\infty]} r e^{-r^2} dr = (2\pi) \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^\infty = \pi$$

verwendet haben.
2. Es gilt:

$$\begin{aligned}
(e^{-4\pi^2\epsilon|t|^2})^\wedge(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2\epsilon|t|^2} \cdot e^{-2\pi i x\cdot t} dt = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2\epsilon(t_1^2+\cdots+t_n^2)-2\pi i(x_1t_1+\cdots+x_nt_n)} dt = \\
&= \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2\epsilon t_j^2 - 2\pi i x_j t_j} dt_j = \prod_{j=1}^n \left(e^{-\frac{1}{4\epsilon}x_j^2} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-(2\pi\sqrt{\epsilon}t_j + \frac{i}{2\sqrt{\epsilon}}x_j)^2} dt_j \right) = \\
&= \prod_{j=1}^n \left(\frac{e^{-\frac{1}{4\epsilon}x_j^2}}{2\pi\sqrt{\epsilon}} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-u_j^2} du_j \right) = \frac{e^{-\frac{1}{4\epsilon}|x|^2}}{2^n\pi^n\epsilon^{n/2}} \cdot \pi^{n/2} = \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{n/2}} \cdot e^{\frac{-|x|^2}{4\epsilon}} .
\end{aligned}$$

3. Dies folgt aus *2.* und Bemerkung 5.2. □

Nun formen wir endlich $f * \varphi_{\sqrt{\epsilon}}$ um:

$$\begin{aligned}
(f * \varphi_{\sqrt{\epsilon}})(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_{\sqrt{\epsilon}}(y-x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \left(\frac{1}{(4\pi\epsilon)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{|x-y|^2}{4\epsilon}} \right) dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \left(e^{2\pi i y\cdot t} \cdot e^{-4\pi^2\epsilon|t|^2} \right)^\wedge (x) dx.
\end{aligned}$$

Der folgende Satz wird uns jetzt zusammen mit der Bemerkung 6.3 eine weitere Umformung ermöglichen:

Satz 7. *Seien f und g in $L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x) dx$$

Beweis: Der Beweis benutzt den Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i x\cdot t} dt \right) g(x) dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i t\cdot x} dx \right) f(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t)\hat{g}(t) dt.
\end{aligned}$$

□

Damit ergibt sich insbesondere

$$(f * \varphi_{\sqrt{\epsilon}})(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{2\pi i y\cdot x} \cdot e^{-4\pi^2\epsilon|x|^2} dx .$$

Die Ähnlichkeit zum ursprünglichen Ansatz für die Inverse verleitet uns zur

Definition. *Für jedes* $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $\epsilon > 0$ *heisst das Integral*

$$G_\epsilon(g) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \cdot e^{-4\pi^2\epsilon|x|^2} dx$$

das Gauss-Mittel von g *zum Niveau* ϵ. *Falls der Grenzwert* $\lim_{\epsilon\to 0} G_\epsilon(g)$ *existiert, nennen wir* g *Gauss-summierbar zum Wert* $\lim_{\epsilon\to 0} G_\epsilon(g)$.

Insbesondere ist also $(f * \varphi_{\sqrt{\epsilon}})(y)$ das Gauss-Mittel von $g(x) = \hat{f}(x)e^{2\pi i x\cdot y} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ zum Niveau ϵ. Dies ist schon des Pudels Kern. Was wir aber noch schuldig geblieben sind, ist der Beweis der Konvergenz von $f * \varphi_\epsilon$ gegen f in der L^1-Norm. Dies zeigen wir allgemeiner in Form von

Satz 8. *Sei* $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *so dass* $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 1$. *Ferner setze man für* $\epsilon > 0$ $\psi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\psi(\frac{x}{\epsilon})$. *Falls nun* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *für ein* $1 \leq p < \infty$, *dann gilt*

$$\lim_{\epsilon\to 0} ||f * \psi_\epsilon - f||_p = 0.$$

Insbesondere ergibt sich, wenn wir ψ *gleich der Gauss-Funktion* φ *setzen, dass*

$$\lim_{\epsilon\to 0} ||f * \varphi_\epsilon - f||_p = 0.$$

Beweis: Der Transformationssatz zeigt, dass für alle $\epsilon > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\epsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 1$$

gilt. Daher haben wir insbesondere:

$$\begin{aligned}(f * \psi_\epsilon)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\psi_\epsilon(t)dt - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi_\epsilon(t)dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x))\, \epsilon^{-n}\psi(\frac{t}{\epsilon})dt.\end{aligned}$$

Daraus liefert die Minkowski-Ungleichung für Integrale[2], dass

$$\begin{aligned}||f * \psi_\epsilon - f||_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x)) \cdot \epsilon^{-n}\psi(\frac{t}{\epsilon})dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} \epsilon^{-n}|\psi(t/\epsilon)|dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\epsilon t) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} |\psi(t/\epsilon)|dt.\end{aligned}$$

Der letzte Integrand ist durch die integrable Funktion $2||f||_{L^p}|\psi_\epsilon|$ beschränkt. Zudem gilt $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\epsilon t) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} \to 0$ $(\epsilon \to 0)$, wie wir im nachfolgenden Lemma zeigen werden. Daher folgt mit dem Satz von Lebesque sofort, dass $||f * \psi_\epsilon - f||_p \to 0$. $\square$

[2] Eine genaue Formulierung samt Beweis für diese (etwas schwieriger zu zeigende) Ungleichung findet sich in Amann und Escher, Analysis III, Satz X.6.21. Man kann sie aber vorläufig auch einfach als kontinuierliche Version der gewöhnlichen Minkowski-Ungleichung akzeptieren.

Lemma 9. (Translationsstetigkeit des Integrals) *Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\lim_{h \to 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} = 0.$$

Beweis: Sei zunächst $f \in \mathcal{C}_c^0$. Dann gibt es eine kompakte Menge K, so dass $h_0 := dist(supp(f), K^c) > 0$. Damit gilt $supp(\tau_h f) \cup supp(f) \subseteq K$ für alle $|h| < h_0$. Da f auf dem Kompaktum K gleichmässig stetig ist, existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $h_{1,\epsilon} > 0$, so dass $|f(x-h) - f(x)| < \epsilon$ für alle $|h| < h_{1,\epsilon}$ mit $(x-h)$, $x \in K$. Für $|h| < min(h_0, h_{1,\epsilon})$ gilt daher $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) - f(x)|^p dx \leq \mathcal{L}^1(K) \cdot \epsilon^p$, und $\epsilon \to 0$ liefert die Behauptung.
Für allgemeines $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine Folge von Funktionen $g_n \in \mathcal{C}_c^0$, die in der L^p-Norm gegen f konvergiert. Nun gilt aber:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) - g_n(x-h)|^p dx \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g_n(x-h) - g_n(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g_n(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \to 0$$

da das erste und dritte Integral gleich $||g_n - f||_{L^p}$ ist und das mittlere, wie schon gezeigt, gegen 0 konvergiert. $\square$

Wenden wir nun den Satz 8 auf unsere Situation an, so erhalten wir:

Satz 10. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt:*

$$G_\epsilon(\hat{f}(x)e^{2\pi i y \cdot x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi i y \cdot x} \cdot e^{-4\pi^2 \epsilon |x|^2} dx = f * \varphi_{\sqrt{\epsilon}}(y) \xrightarrow{L^1} f(y).$$

Dies ist das abschliessende Resultat unseres Vortrages, das besagt, dass die die Gauss-Mittel von $\hat{f}(x)e^{2\pi i y \cdot x}$ gegen die ursprüngliche Funktion f in der L^1-Norm konvergieren.

Im nächsten Vortrag werden wir zudem sehen, dass die Gauss-Mittel fast überall gegen die ursprüngliche Funktion f konvergieren; dabei kommt dann auch der Begriff der Gauss-Summierbarkeit zum Zuge.