ETH Zürich
Departement Mathematik

HS 2007

Seminararbeit

Inverse Fourier Transformation

Patricia Hinder
Sandra König

Oktober 2007

Prof. M. Struwe

Im Vortrag der letzten Woche haben wir gesehen, dass die Faltung von f mit φ_ε in der L^p Norm gegen die Funktion f konvergiert. Das Ziel unseres Vortrages ist es, eine punktweise Konvergenz der Faltung $f * \varphi_\varepsilon$ zu beweisen. Im kommenden Vortrag bezeichnen wir den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ mit E_n. Zur Erinnerung schreiben wir nochmals die Hauptsätze des letzten Vortrages auf:

Satz 1. *Sei φ in $L^1(E_n)$ mit $\int_{E_n} \varphi(x)dx = 1$ und für $\varepsilon > 0$ definieren wir $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Sei $f \in L^p(E_n)$ für ein $p \in [1, \infty)$. Dann gilt*

$$\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

Satz 2. *Seien f und Φ beide in $L^1(E_n)$, $\varphi = \hat{\Phi}$ und $\int_{E_n} \varphi(x)dx = 1$. Dann gilt*

$$\int_{E_n} \hat{f}(x)e^{2\pi it\cdot x}\Phi(\varepsilon x)dx = \int_{E_n} f(x)\varphi_\varepsilon(x-t)dx$$

für alle $\varepsilon > 0$.

Dieser Satz folgt aus der Multiplikations Formel ($\int \hat{f}g = \int f\hat{g}$). Aus Satz 1 und Satz 2 bekommt man für $f \in L^1(E_n)$ folgende Aussage:

Satz 3. *Seien Φ und $\varphi = \hat{\Phi}$ beide integrierbar und gilt $\int_{E_n} \varphi(x)dx = 1$, dann konvergieren die Φ-Mittel des Integrals $\int_{E_n} \hat{f}(t)e^{2\pi ix\cdot t}dt$ in L^1 gegen $f(x)$. Insbesondere konvergieren die Gauss-Mittel dieses Integrals in der L_1-Norm gegen $f(x)$.*

Aus diesem Satz folgen 2 Korollare: Die Umkehrformel und die Injektivität der Fouriertransformation.

Korollar 4 (Fourier Umkehrformel). *Seien f und $\hat{f}$ beide in $L^1(E_n)$, dann gilt*

$$f(x) = \int_{E_n} \hat{f}(t)e^{2\pi ix\cdot t}dt$$

für fast alle x in E_n.

Beweis:

Für $\Phi(x) = e^{-4\pi^2|t|^2}$ betrachten wir das Gauss-Mittel $\int_{E_n} \hat{f}(t)e^{2\pi ixt}e^{-4\pi^2\varepsilon|t|^2}dt$. Aus Satz 3 wissen wir, dass für $\varepsilon > 0$ die Folge $\int_{E_n} \hat{f}(t)e^{2\pi ixt}e^{-4\pi^2\varepsilon|t|^2}dt$ in L^1 gegen $f(x)$ konvergiert, für $\varepsilon \to 0$. Damit wissen wir, dass eine Teilfolge $\varepsilon_k > 0, \varepsilon_k \to 0$ existiert, so dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_n} \hat{f}(t)e^{2\pi ix\cdot t}e^{-4\pi^2\varepsilon_k|t|^2}dt = f(x)$$

punktweise für fast alle $x \in E_n$. Da $\hat{f} \in L^1(E_n)$ und $|e^{-4\pi^2\varepsilon_k|t|^2}| \leq 1$, folgt mit dem Satz der dominierten Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_n} \hat{f}(t)e^{2\pi i x\cdot t}e^{-4\pi^2\varepsilon_k|t|^2}dt = \int_{E_n} \hat{f}(t)e^{2\pi i x\cdot t} \quad \text{für fast alle } x \in E_n.$$

Korollar 5 (**Eindeutigkeit der Fouriertransformation**). *Seien f_1 und f_2 in $L^1(E_n)$ und sei $\hat{f}_1(t) = \hat{f}_2(t)$ für alle $t \in E_n$. Dann folgt*

$$f_1(x) = f_2(x)$$

für fast alle $x \in E_n$.

Beweis:
Wir setzen $f = f_1 - f_2$ und zeigen, dass $f(x) = 0$ für fast alle $x \in E_n$. Es ist $f \in L^1(E_n)$ und $\hat{f}(t) = 0$ für alle t. Mit Korollar 1 folgt, dass $f(x) = 0$ für fast alle $x \in E_n$.

Wie schon erwähnt wollen wir die Konvergenz von $f * \varphi_\varepsilon$ im punktweisen Sinne beweisen. Die Konvergenz gilt aber nicht für alle $x \in E_n$ sondern nur für alle Lebesguepunkte.

Definition 6. Lebesguepunkt
Sei $f \in L^1(E_n)$. Ein Punkt $x \in E_n$ heisst ein Lebesguepunkt von f, falls

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int_{|t|<r} |f(x-t) - f(x)|dt = 0.$$

Bem: Falls $f \in L^1(E_n)$, so ist fast jeder Punkt in E_n ein Lebesguepunkt. Dies ist die Aussage des Differentationssatzes von Lebesgue, siehe Vortrag in der ersten Woche.

Satz 7 (**Satz über die punktweise Konvergenz**). *Sei $\varphi \in L^1(E_n)$, $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$ und $\psi(x) := ess\ sup_{|t|\geq|x|}|\varphi(t)|$. Gilt $\psi \in L^1(E_n)$ und $f \in L^p(E_n)$ für ein p zwischen 1 und ∞ (Grenzen eingeschlossen), dann gilt für alle Lebesguepunkte von f*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(f * \varphi_\varepsilon)(x) = f(x) \int_{E_n} \varphi(t)dt.$$

Betrachten wir die Funktion $\psi(x)$ etwas genauer. Sie hat den Vorteil gegenüber $\varphi(x)$ dass sie nichtwachsend ist. Setzt man $\varphi(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp(\frac{-|x|}{4})$ (Gauss-Mittel), so stimmen die beiden Funktionen überein. Im Beweis werden folgende Eigenschaften von $\psi(x)$ wichtig sein:

1. Für alle $x \in E_n$ gilt $\psi(x) \geq \mid \varphi(x) \mid$.

2. Die Funktion $\psi(.)$ ist radial, das heisst, ihr Wert hängt nur vom Betrag des Vektors x ab. Formal ausgedrückt: $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ falls $|x_1| = |x_2|$. Im Folgenden werden wir daher $\psi_0(r) := \psi(x)$ setzen für alle x mit $|x| = r$.
   Dieses $\psi_0(.)$ ist eine in r fallende Funktion, da für grössere r das essentielle Supremum über eine kleinere Menge genommen wird und daher nicht grösser werden kann.

3. Es gilt $\lim r^n \psi_0(r) = 0$ für $r \to 0$ oder $r \to \infty$:
   $$\int_{\frac{r}{2} \leq |x| \leq r} \psi(x)dx \geq^{(2)} \psi_0(r) \int_{\frac{r}{2} \leq |x| \leq r} 1dx = \psi_0(r) r^n \Omega_n \frac{2^n - 1}{2^n}$$
   wobei Ω_n das Volumen des abgeschlossenen Einheitsballs des E_n bezeichnet. Das Integral auf der linken Seite geht sowohl für r gegen 0 (Integralgrenzen gehen zusammen) als auch für r gegen ∞ (mit dominierter Konvergenz) gegen 0. Damit gilt dasselbe für $r^n \psi_0(r)$.

4. Aus der Eigenschaft 3 folgt, dass eine Konstante A existiert, so dass $r^n \psi_0(r) \leq A$ ist für $r \in (0, \infty)$.

Beweis (Satz 7):
Wir fixieren einen Lebesguepunkt x von f und wählen ein (ebenfalls festes) $\delta > 0$. Dann existiert (nach Definition eines Lebesguepunktes) ein $\eta > 0$, so dass

$$r^{-n} \int_{|t|<r} \mid f(x-t) - f(x) \mid dt < \delta$$

für alle $r \leq \eta$ gilt. Diese Ungleichung lässt sich umschreiben als

$$G(r) := \int_0^r s^{n-1} \underbrace{\int_{\Sigma_{n-1}} \mid f(x - st') - f(x) \mid dt'}_{=:g(s)} ds \leq \delta r^n$$

wobei Σ_{n-1} die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre $\{t' \in E_n : \mid t' \mid = 1\}$ und dt' ein Oberflächenelement darauf bezeichnet. Da $\int_{E_n} \varphi_\varepsilon(t)dt = \int_{E_n} \varphi(t)dt =: a$ für alle $\varepsilon > 0$ ist, gilt

$$
\begin{aligned}
\mid (f * \varphi_\varepsilon)(x) - af(x) \mid &= \mid \int_{E_n} (f(x-t) - f(x))\varphi_\varepsilon(t)dt \mid \\
&\leq \mid \int_{|t|<\eta} (f(x-t) - f(x))\varphi_\varepsilon(t)dt \mid \\
&+ \mid \int_{|t|\geq\eta} (f(x-t) - f(x))\varphi_\varepsilon(t)dt \mid \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Wir schätzen nun zuerst I_1 ab:

$$
I_1 \leq \int_{|t|<\eta} \mid f(x-t) - f(x) \mid \varepsilon^{-n}\psi(t/\varepsilon)dt = \int_0^\eta \int_{\Sigma_{n-1}} \mid f(x-rt') - f(x) \mid \varepsilon^{-n}\psi_0(r/\varepsilon)dt'dr
$$

$$
= \int_0^\eta r^{n-1} g(r)\varepsilon^{-n}\psi_0(r/\varepsilon)dr.
$$

Mit partieller Integration und nach Definition von $G(r)$ folgt, dass sich dieses Integal umformen lässt zu

$$
\begin{aligned}
&= G(r)\varepsilon^{-n}\psi_0(r/\varepsilon)|_0^\eta - \int_0^\eta G(r)d(\varepsilon^{-n}\psi_0(r/\varepsilon)) \\
&\leq \delta r^n \varepsilon^{-n}\psi_0(r/\varepsilon) \mid_0^\eta - \int_0^{\eta/\varepsilon} G(\varepsilon s)\varepsilon^{-n}d\psi_0(s).
\end{aligned}
$$

Mit der Eigenschaft 4 der Funktion $\psi_0(r)$ ergibt sich

$$
\leq \delta A - \int_0^{\eta/\varepsilon} \delta s^n d\psi_0(s) \leq \delta\big(A - \int_0^\infty s^n d\psi_0(s)\big).
$$

Da $\psi_0(.)$ eine fallende Funktion und der Integrand positiv ist gilt aber, dass

$$
-\int_0^\infty s^n d\psi_0(s) = n\int_0^\infty s^{n-1}\psi_0(s)ds = \frac{n}{\omega_{n-1}}\int_{E_n} \psi(x)dx,
$$

wobei ω_{n-1} den Flächeninhalt der $(n-1)$-dimensionalen Sphäre bezeichnet. Daraus folgt, dass eine Konstante $B = B(\psi)$ existiert, so dass $I_1 \leq B\delta$ ist.
Um I_2 abzuschätzen, setzen wir $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)$ und wir definieren die charakteristische Funktion $\chi_n(x) := 1_{\{|x|\geq\eta\}}$. Für $1/p + 1/p' = 1$ folgt mit der Hölder Ungleichung

$$
I_2 = \mid \int_{|t|\geq\eta} (f(x-t) - f(x))\varphi_\varepsilon(t)dt \mid \leq \| |f| \|_p \parallel \chi_n\psi_\varepsilon \|_{p'} + |f(x)| \|\chi_n\psi_\varepsilon\|_1.
$$

Wegen

$$\|\chi_n\psi_\varepsilon\|_1 = \int_{|x|\geq\eta} \psi_\varepsilon(x)dx = \int_{|x|\geq\eta/\varepsilon} \psi(x)dx$$

stebt der zweite Summand gegen 0 für $\varepsilon \to 0$.
Wir zeigen das Gleiche für den ersten Summanden: Da $p' = 1 + p'/p$ ist, folgt mit der Hölder Ungleichung

$$\||\chi_n\psi_\varepsilon\||_{p'} = (\int_{|x|\geq\eta} \psi_\varepsilon(x)^{p'}dx)^{1/p'} = (\int_{|x|\geq\eta} \psi_\varepsilon(x)\psi_\varepsilon(x)^{p'/p}dx)^{1/p'} \leq \|\chi_n\psi_\varepsilon\|_\infty^{1/p}\|\chi_n\psi_\varepsilon\|_1^{1/p'}.$$

Es gilt (mit der Eigenschaft 3 von ψ_0)

$$\|\chi_n\psi_\varepsilon\|_\infty = \sup_{|x|\geq\eta} \psi_\varepsilon(x) = \eta^{-n}(\eta/\varepsilon)^n\psi_0(\eta/\varepsilon) \to 0$$

falls $\varepsilon \to 0$ und η fix. Damit haben wir gezeigt, dass für ε klein genug I_2 beliebig klein wird und somit

$$|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - af(x)|$$

durch ein konstantes Vielfaches von δ beschränkt ist, wobei die Konstante nur von ψ abhängt. Daraus folgt die Behauptung, da δ beliebig gewählt werden konnte.

Korollar 8. *Sei $f \in L^1(E_n)$ und $\hat{f} \geq 0$. Falls f an der Stelle 0 stetig ist, dann liegt $\hat{f}$ in $L^1(E_n)$ und*

$$f(t) = \int_{E_n} \hat{f}(x)e^{2\pi it\cdot x}dx$$

für fast alle $t \in E_n$ und f hat einen stetigen Repräsentanten.
Insbesondere gilt

$$f(0) = \int_{E_n} \hat{f}(x)dx.$$

Beweis:
Da f in 0 stetig ist, ist 0 sicher ein Lebesguepunkt von f. Damit gilt mit Satz 3, dass $\lim_{\varepsilon\to 0}(f * \varphi_\varepsilon)(x) = f(x)$. Falls wir das Abel-Mittel mit der Funktion $\Phi(x) = e^{-2\pi|x|}$ betrachten, folgt

$$\int_{En} \hat{f}(x)e^{2\pi it\cdot x}e^{-2\pi\varepsilon|x|}dx = (f * \varphi_\varepsilon)(t)$$

Betrachten wir nun f an der Stelle 0 dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{E_n} \hat{f}(x) e^{-2\pi\varepsilon|x|} dx = f(0).$$

Da $\hat{f} \geq 0$ folgt mit dem Lemma von Fatou

$$\int_{E_n} \liminf_{\varepsilon \to 0} \hat{f}(x) e^{-2\pi\varepsilon|x|} dx \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{E_n} \hat{f}(x) e^{-2\pi\varepsilon|x|} dx = f(0) < \infty.$$

Der Limes auf der linken Seite existiert, da

$$\int_{E_n} \liminf_{\varepsilon \to 0} \hat{f}(x) e^{-2\pi\varepsilon|x|} dx = \int_{E_n} \hat{f}(x) \liminf_{\varepsilon \to 0} e^{-2\pi\varepsilon|x|} dx = \int_{E_n} \hat{f}(x) dx$$

Damit folgt

$$\int_{E_n} \hat{f}(x) dx = \int_{E_n} |\hat{f}(x)| dx < \infty.$$

Also liegt $\hat{f}$ in $L^1(E_n)$ und Korollar 1 lässt sich anwenden. Dies liefert die punktweise Gleichheit.
Im Vortrag der letzten Woche wurde gezeigt, dass die Fouriertransformierte $\hat{f}$ stetig ist. Da $\hat{f}$ auch integrierbar ist, folgt dass das Integral $\int_{E_n} \hat{f}(x) e^{2\pi i t \cdot x} dx$ eine in t stetige Funktion darstellt.