L^2-Theorie und Plancherel-Theorem

Seminar "Grundideen der Harmonischen Analysis"
bei Porf. Dr. Michael Struwe
HS 2007

Vortrag von Manuela Dübendorfer

1 Wiederholung aus der L^1-Theorie

Um die Fourier-Transformation für Funktionen aus L^2 zu berechnen, brauchen wir einige Resultate aus der L^1-Theorie.

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, e^{-2\pi i t x}\, dt. \tag{1.1}$$

Seien $f, g \in L^1$. Für die Faltung $f * g$ gilt
$f * g$ liegt in L^1, ist gleichmässig stetig und

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}. \tag{1.2}$$

Weiter gelten

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \cdot \bar{\hat{g}}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \bar{g}\, dx, \tag{1.3}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \hat{g}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \cdot g\, dx. \tag{1.4}$$

Proposition 1.1. *Sei $f \in L^1$, stetig in 0 und $\hat{f} \geq 0$.*
Dann ist $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\, e^{2\pi i t x}\, dx$$

fast überall. Insbesondere gilt

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) dx.$$

2 L^2-Theorie und Plancherel-Theorem

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist die Fouriertransformierte einer beliebigen Funktion $f \in L^2$ zu definieren. Und zwar können wir dazu eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1 \cap L^2$ konstruieren, die in L^2 gegen f konvergiert. Für die Folgenglieder f_n ist die Fouriertransformierte definiert. Die Fouriertransformierte von f ist dann definiert als der Limes der Folge $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Um diese Folge wirklich konstruieren zu können, brauchen wir vorerst einen Satz für Funktionen in $L^1 \cap L^2$.

Satz 2.1. *Sei $f \in L^1 \cap L^2$, dann gilt $\left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2$.*

Beweis. Sei $g := \overline{f(-x)}$ und $h := f * g$ die Faltung, also

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, \overline{f(-y)}\, dy \tag{2.1}$$

Da $f \in L^1 \cap L^2$, ist $\hat{f}$ wohldefiniert. Mit (1.1) und einer Variabeltransformation, kann man leicht nachrechnen, dass $\hat{g} = \overline{\hat{f}}$.
Damit und mit (1.2) folgt $\hat{h} = \hat{f} \cdot \hat{g} = \hat{f} \cdot \overline{\hat{f}} = \left|\hat{f}\right|^2$.
Unter Verwendung von Proposition 1.1 und (2.1) gilt schliesslich

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}\right|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}\, dx = h(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(-y)\overline{f(-y)}\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2\, dx.\end{aligned}$$

□

Notation 2.1. *Wir schreiben $\hat{f} =: \mathcal{F}f$,*
wobei wir mit $\mathcal{F}$ den Operator bezeichnen, der f auf $\hat{f}$ abbildet.

Proposition 2.1. *$\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$ ist ein beschränkter linearer Operator.*

Beweis. Beschränktheit folgt direkt aus Satz 2.1.
Die Linearität folgt aus der Linearität des Integrals. □

Proposition 2.2. *$L^1 \cap L^2$ liegt dicht in L^2.*

Beweis. Es gilt C_c^∞ dicht in L^2 und auch dicht in L^1, also ist C_c^∞ dicht in $L^1 \cap L^2$
Mit $C_c^\infty \subset L^2$ dicht, $C_c^\infty \subset L^1 \cap L^2$ dicht und $L^1 \cap L^2 \subset L^2$, ist $L^1 \cap L^2$ dicht in L^2. $\square$

Da nun $L^1 \cap L^2$ dicht in L^2 liegt, muss es eine eindeutige Fortsetzung von $\mathcal{F}$ auf ganz L^2 geben. Diese werden wir jetzt konstruieren.

Sei $f \in L^2$.
Für $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$f_k(t) := \begin{cases} f(t), & |t| \leq k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt offensichtlich, dass $f_k \overset{k\to\infty}{\to} f$ in L^2.
Weiter liegt f_k in $L^1 \cap L^2$, da $f \in L^2$ und der Support von f_k kompakt ist.
Da nun f_k auch in L^1 ist, können wir die Fouriertransformierte von f_k wie in L^1 berechnen. Diese ist dann wohldefiniert,

$$\begin{aligned} \widehat{f_k}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_k(t) e^{-2\pi i t x} \, dt \\ &= \int_{|t|\leq k} f(t) \, e^{-2\pi i t x} \, dt. \end{aligned}$$

Da $f_k \in L^2$, liegt nach Satz 2.1 auch $\hat{f}_k$ in L^2.
Weil f_k gegen f konvergiert, ist auch $\hat{f}_k$ eine Cauchy-Folge, da für $k, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{k,l\to\infty} \left\| \hat{f}_k - \hat{f}_l \right\|_2 = \lim_{k,l\to\infty} \left\| \widehat{f_k - f_l} \right\|_2 = \lim_{k,l\to\infty} \|f_k - f_l\|_2 = 0.$$

Da nun $\hat{f}_k$ eine Cauchy-Folge und L^2 vollständig ist, konvergiert $\hat{f}_k$ in L^2.

Definition 2.1. *Die Fouriertransformierte von f definieren wir als den oben genannten, eindeutigen Limes von $\hat{f}_k$ in L^2,*

$$\hat{f}(x) := \lim_{k\to\infty} \hat{f}_k = \lim_{k\to\infty} \int_{|t|\leq k} f(t) \, e^{-2\pi i t x} \, dt.$$

Bemerkung 2.1. *Es kommt nicht auf die Wahl der Folge f_k an.*

Beweis. Sei $f_k \to f$ und $\hat{f}_k \to \hat{f}$ für $k \to \infty$ wie vorhin.
Sei nun g_k eine weitere Folge in $L^1 \cap L^2$ mit $g_k \to f$ $(k \to \infty)$ in L^2.
$\widehat{g_k}$ ist mit dem selben Argument wie vorhin bei $\hat{f}_k$ eine Cauchy-Folge.

Somit besitzt auch g_k einen eindeutigen Limes in L^2, wir nennen ihn g. Betrachte nun $0 = \lim_{k\to\infty} \|f_k - g_k\|_2 = \lim_{k\to\infty} \left\|\hat{f}_k - \hat{g}_k\right\|_2 = \left\|\hat{f} - \hat{g}\right\|_2$

Dies ist äquivalent dazu, dass $\hat{f} = \hat{g}$, da $\|\cdot\|_2$ eine Norm ist.
Also konvergiert auch $\hat{g}_k$ gegen $\hat{f}$. □

Das heisst nun, dass die Transformierten einer Folge, die gegen f konvergiert, immer gegen die Transformierte von f konvergieren. Somit ist also die Fouriertransformierte einer Funktion in L^2 mit Definition 2.1 eindeutig bestimmt.

Im Folgenden werden wir einige schöne Eigenschaften für den L^2-Raum herleiten. Dazu können wir benutzen, dass er ein Hilbertraum ist, da er vollständig ist und folgendes Skalarprodukt besitzt.

Definition 2.2. *Das Skalarprodukt für Funktionen $f, g \in L^2$ ist definiert als*

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt.$$

Die meisten Eigenschaften der L^1-Theorie übertragen sich auch auf L^2. Für beliebige Funktionen $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gelten

i)
$$\left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2 \tag{2.2}$$

ii)
$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\, \overline{\hat{g}}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\, \bar{g}\, dx, \qquad \text{d.h.} \left\langle \hat{f}, \hat{g}\right\rangle = \langle f, g\rangle \tag{2.3}$$

iii)
$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, \hat{g}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\, g\, dx, \qquad \text{d.h.} \langle f, \hat{g}\rangle = \left\langle \hat{f}, g\right\rangle. \tag{2.4}$$

Beweis. Sei $\hat{f}$ wie oben definiert, als

$$\hat{f}(x) = \lim_{k\to\infty} \hat{f}_k = \lim_{k\to\infty} \int_{|t|\le k} f(t)\, e^{-2\pi i t x}\, dt$$

Es genügt die Eigenschaften für $f, g \in L^1 \cap L^2$ zu überprüfen. Die allgemeine Aussage folgt dann durch die Definition von $\hat{f}$ und $\widehat{g}$ in L^2 und mit der Stetigkeit der Fouriertransformation.

i) Dies ist genau Satz 2.1.

ii) + iii) Falls $f, g \in L^1 \cap L^2$, dann liegen f und g insbesondere in L^1, somit gelten die gewünschten Eigenschaften aufgrund von (1.3), bzw. (1.4). □

Diese Eigenschaften können wir nun gebrauchen, um das Hauptresultat der L^2-Theorie zu beweisen, nämlich den Satz von Plancherel. Um ihn formulieren zu können, brauchen wir noch folgende Definition.

Definition 2.3. *Ein Operator heisst unitär, wenn er linear, isometrisch und bijektiv ist (Isometrisch bedeutet, dass die Metrik bzw. hier die Norm erhalten bleibt).*

Satz 2.2. *(Plancherel)*

i) Die Fouriertransformation ist ein unitärer Operator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

ii) Die Inverse Abbildung der Fouriertransformation $\mathcal{F}$, bekommt man mittels

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \mathcal{F}g(-x) \qquad \forall g \in L^2.$$

Beweis. i) Linearität haben wir in Proposition 2.1 schon gezeigt.
Isometrie folgt direkt aus Satz 2.1, nämlich $\|\mathcal{F}f - \mathcal{F}g\|_2 = \|f - g\|_2$.
Aus der Isometrie folgt auch direkt die Injektivität, denn

$$0 = \|\mathcal{F}f - \mathcal{F}g\|_2 = \|f - g\|_2 \qquad \Rightarrow f = g,$$

da $\|\cdot\|_2$ eine Norm ist.

Es bleibt also die Surjektivität von $\mathcal{F}$ zu zeigen.

Beh.1. *$\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n)) =: W$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $L^2(\mathbb{R}^n)$*

Beweis. Da $\mathcal{F}$ injektiv ist, folgt, dass $\mathcal{F} : L^2 \to W = im(\mathcal{F})$ bijektiv ist (weil jedes Element aus W mindestens ein Urbild besitzt, folgt Surjektivität).
Betrachte nun eine Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in W mit $g_k \to g \in L^2$ für $k \to \infty$.
Da $\mathcal{F}$ bijektiv auf sein Bild ist, gibt es für jedes k in $\mathbb{N}$ genau ein $f_k \in L^2$ mit $\mathcal{F}f_k = g_k$.
f_k ist eine Cauchy-Folge, da aus Satz 2.1 folgt

$$\lim_{k,l\to\infty} \|f_k - f_l\|_2 = \lim_{k,l\to\infty} \|g_k - g_l\|_2 = 0,$$

da $g_k \to g$ für $k \to \infty$.
Somit ist also f_k eine Cauchy-Folge, und da L^2 vollständig ist, gibt es

ein $f \in L^2$ mit $f_k \to f$ für $k \to \infty$.
Betrachte nun $\mathcal{F}f$. Dies liegt sicher in W, da f in L^2 liegt. Es gilt weiter

$$0 = \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|g_k - \mathcal{F}f\|_2 = \left\| \lim_{k\to\infty} g_k - \mathcal{F}f \right\|_2 = \|g - \mathcal{F}f\|_2 .$$

Somit folgt g=$\mathcal{F}f$.
Also hat jede konvergente Folge in W auch den Limes dort, deshalb ist W ein abgeschlossener Teilraum von L^2. □

Beh.2. *$\mathcal{F}$ ist surjektiv*

Beweis. (indirekt) Zu zeigen ist nun, dass W der ganze Raum L^2 ist.
Nehme also an, $L^2 \neq W$.
L^2 ist ein Hilbertraum mit dem in Def.2.2 definierten Skalarprodukt.
Da wegen Beh.1 W ein abgeschlossener linearer Unterraum vom Hilbertraum L^2 ist, gilt

$$L^2(\mathbb{R}^n) = W \oplus W^\perp, \qquad \text{für } W^\perp = \left\{ z \in L^2; \langle z, w \rangle = 0,\ \forall w \in W \right\}.$$

Nach Annahme ist $W \neq L^2$. Somit existiert ein $f \neq 0$ in $W^\perp$, d.h. $\langle f, \hat{g} \rangle$=0 für alle $\hat{g} \in W$. Da $\hat{g} \in W$ und $\mathcal{F} : L^2 \to W$ bijektiv, ist g eindeutig bestimmt, und weil f in L^2 liegt, ist auch $\hat{f} = \mathcal{F}f$ bestimmt.
Somit gilt mit (2.4) $0 = \langle f, \hat{g} \rangle = \left\langle \hat{f}, g \right\rangle \qquad \forall g \in L^2$.
Also ist $\hat{f} \in (L^2)^\perp$=$\{0\}$ und damit $f = 0$ im Widerspruch dazu, dass wir $f \neq 0$ gewählt haben. □

ii) Sei $f_k \to f \in L^2$ mit $\hat{f}_k \to \hat{f}$ wie in Definition 2.1.
Sei h_k eine Folge von Funktionen mit

$$h_k(t) = \int_{|x|\leq k} \hat{f}(x)\, e^{2\pi i t x}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_k(x)\, e^{2\pi i t x}\, dx.$$

Es gilt offensichtlich, dass h_k in L^2 liegt, da $\hat{f} \in L^2$.
Weil $\hat{f}_k$ gegen $\hat{f}$ konvergiert, folgt mit Definition von h_k
$\lim_{k,l\to\infty} \|h_k - h_l\|_2$=0, somit ist h_k eine Cauchy-Folge in L^2.
Da L^2 vollständig ist, konvergiert h_k gegen eine Funktion $\tilde{h} \in L^2$.
Und zwar ist

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t) &= \lim_{k\to\infty} h_k(t) = \lim_{k\to\infty} \int_{|x|\leq k} \hat{f}(x)\, e^{2\pi i t x}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\, e^{2\pi i t x}\, dx \\ &= (\mathcal{F}\hat{f})(-t). \end{aligned}$$

Für $g \in L^2$ und $g_k \in L^1 \cap L^2$ mit $g_k \to g$ in L^2 gilt nun mit Fubini

$$\begin{aligned}
\left\langle g, \tilde{h} \right\rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle g_k, h_k \rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(t) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}_k}(x)\, e^{-2\pi i t x}\, dx \right] dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}_k}(x) \left[\int_{\mathbb{R}^n} g_k(t)\, e^{-2\pi i t x}\, dt \right] dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}_k}(x)\, \hat{g}_k(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}}(x)\, \hat{g}(x)\, dx = \left\langle \hat{g}, \hat{f} \right\rangle \\
&= \langle g, f \rangle\,, \qquad \text{nach (2.3).}
\end{aligned}$$

Fubini durften wir anwenden, da das Skalarprodukt von zwei Funktionen in L^2 existiert und somit endlich ist. Aus demselben Grund konnten wir Integral und Limes vertauschen.
Somit gilt also

$$\left\langle g, \tilde{h} \right\rangle = \langle g, f \rangle$$

für alle g in L^2, und mit dem Rieszschen Darstellungssatz folgt

$$f(t) = \tilde{h}(t) = (\mathcal{F}\hat{f})(-t) \qquad \forall f \in L^2.$$

Und damit

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(t) = \hat{f}(-t) = \mathcal{F}f(-t) \qquad \forall f \in L^2.$$

□

3 Fourier-Transformation auf L^p für $1 \leq p \leq 2$

Definition 3.1. $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n) := \{f = f_1 + f_2, f_i \in L^i, i = 1, 2\}$.
Dann ist die Fouriertransformierte einer solchen Funktion
$\hat{f} = \widehat{f_1 + f_2} := \hat{f}_1 + \hat{f}_2$.

Bemerkung 3.1. $\hat{f}$ *ist wohldefiniert.*

Beweis. Sei $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ mit $f_i, g_i \in L^i$ für i=1,2.
Dann folgt
$L^1 \ni g_1 - f_1 = f_2 - g_2 \in L^2$. Somit liegen beide Seiten in $L^1 \cap L^2$.
Da die Fouriertransformation dort eindeutig ist, gilt $\widehat{g_1 - f_1} = \widehat{f_2 - g_2}$,
also nach Definition von $\hat{}$ auf $L^1 + L^2$, $\hat{f}_1 + \hat{f}_2 = \hat{g}_1 + \hat{g}_2$.
Somit ist also die Fouriertransformation auf $L^1 + L^2$ eindeutig bestimmt. □

Proposition 3.1. *$L^1 + L^2$ enthält alle Räume L^p für $1 \le p \le 2$.*

Beweis. Sei $f \in L^p$, $1 \le p \le 2$. Dann definiere

$$f_2(x) := \begin{cases} f(x), & |f(x)| \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und } f_1(x) := f(x) - f_2(x).$$

Wie wir im 3.Vortrag gesehen haben, liegt f_i in L^i für $i = 1, 2$, und damit f in $L^1 + L^2$. $\square$

Somit ist nun die Fouriertransformation für alle $f \in L^p$ definiert (für $1 \le p \le 2$).

Wir können die Faltung von einer Funktion in L^p und einer in L^1 betrachten, dann erhalten wir folgendes Resultat.

Satz 3.1. *(ohne Beweis) Falls $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le 2$, folgt $h := f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{h}(x) = \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x)$.*

Ähnlich wie in Satz 2.1 oder auch in der L^1-Theorie können wir die L^p-Normen $(1 \le p \le 2)$ abschätzen.

Satz 3.2. *(Hausdorff-Young) Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*
Dann lässt sich die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ fortsetzen zu einem beschränkten linearen Operator von $L^p(\mathbb{R}^n)$ nach $L^q(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \le p \le 2$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und es gibt ein $A > 0$ mit

$$\|\mathcal{F}f\|_q \le A \cdot \|f\|_p .$$

Beweis. Um diesen Satz zu beweisen brauchen wir noch zwei wichtige Sätze, die wir in früheren Vorträgen bewiesen haben.

Satz 3.3. *(Riemann-Lebesgue) Die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ ist eine beschränkte lineare Transformation von L^1 nach L^∞ mit $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \le \|f\|_1$.*

Satz 3.4. *(Marcinkiewicz) Sei $T : L^{p_0} + L^{p_1} \to \{f; f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ messbar}\}$ eine subadditive Abbildung, die $w - (p_0, q_0)$ und $w - (p_1, q_1)$ ist.*
Für $0 < t < 1$ sei $\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$ und $\frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$.
Dann ist T stark (p,q), d.h. es gibt ein $A > 0$, so dass

$$\|Tf\|_q \le A \cdot \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Nun zum Beweis von Satz 3.2:

i) p=1, q=∞: Dies ist genau der Satz von Riemann-Lebesgue mit A=1.

ii) p=2, q=2: Dies ist Satz 2.1. Es gilt A=1 und sogar Gleichheit.

iii) $1 < p < 2$: Benutze den Satz von Marcinkiewicz.
$\mathcal{F} : L^1 + L^2 \supset L^p \to L^q \subset \{f; f\ messbar\}$
Da $\mathcal{F}$ linear ist, folgt dass $\mathcal{F}$ auch subadditiv ist.
Setze im Satz von Marcinkiewicz $p_0 = 1, q_0 = \infty, p_1 = 2$ und $q_1 = 2$.
Nach dem Satz von Riemann-Lebesgue und Satz 2.1 ist $\mathcal{F}$ stark (p_0, q_0) und stark (p_1, q_1), also auch schwach. Setze somit

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2} = 1 - \frac{t}{2} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2}.$$

Nach dem Satz von Marcinkiewicz gilt nun:
Es gibt ein $A > 0$ sodass

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq A \cdot \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p.$$

Weiter gilt

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = 1.$$

Somit haben wir Satz 3.2 bewiesen.

□

4 Anwendung: Poisson-Gleichung

Wir wollen nun die Fouriertransformation benutzen, um eine spezielle Partielle Differentialgleichung genauer zu studieren, und zwar folgende Variante der Poisson-Gleichung:

$$- \triangle u + u = f. \tag{4.1}$$

Dies ist äquivalent zu

$$-\widehat{\triangle u} + \hat{u} = \hat{f}. \tag{4.2}$$

Bemerkung 4.1. *Wir wissen, dass* $\widehat{\frac{\partial}{\partial x_j} f}(k) = 2\pi i k_j \cdot \hat{f}(k)$

Damit gilt nun $\widehat{\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u}(t) = 2\pi i t_j \cdot \widehat{\frac{\partial}{\partial x_j} u}(t) = -4\pi^2 t_j^2 \cdot \widehat{u}(t)$.
Verwenden wir dies zusammen mit der Definition von $\triangle$ und der Linearität der Fouriertransformation, dann erhalten wir

$$\widehat{\triangle u} = \widehat{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}} u(t) = \sum_{j=1}^{n} -4\pi^2 t_j^2\, \hat{u}(t) = -\hat{u}(t) \cdot 4\pi^2 |t|^2 .$$

Setzen wir dies in die Poisson-Gleichung ein, erhalten wir

$$4\pi^2 \cdot \widehat{u}(t) \cdot |t|^2 + \widehat{u}(t) = \widehat{f}(t). \tag{4.3}$$

Somit ist also

$$\widehat{u}(t) = \frac{\widehat{f}(t)}{4\pi^2 |t|^2 + 1}.$$

Damit lässt sich u jetzt einfach berechnen, indem wir $\hat{f}$ berechnen. Danach lässt sich mit dem Satz von Plancherel u bestimmen,

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{f}(t)}{4\pi^2 |t|^2 + 1}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{\hat{f}(-t)}{4\pi^2 |t|^2 + 1}\right).$$

Fordern wir $f \in L^2$, dann folgt $u \in L^2$. Weiter gilt mit (4.1)-(4.3), dass

$$f \in L^2 \Leftrightarrow (4\pi^2 |t|^2 + 1) \cdot \widehat{u}(t) \in L^2$$

Um zu sehen, dass u jetzt eine eindeutige Lösung besitzt, brauchen wir die Definition der Sobolev-Räume.

Definition 4.1. *Der Sobolev-Raum auf L^2 ist wie folgt definiert,*

$$H^k = \left\{ f \in L^2; \hat{f}(t) \cdot (1 + 4\pi^2 |t|^2)^{\frac{k}{2}} \in L^2 \right\}.$$

Das heisst nun, dass $f \in L^2 \Leftrightarrow u \in H^2$. Da u in H^2 liegt, ist es zweimal schwach differenzierbar. Somit ist $\triangle u$ definiert und u besitzt eine eindeutige Lösung.