Schwartz-Raum (Teil 1)

Federico Remonda, Robin Krom

10. Januar 2008

Zusammenfassung

Der Schwartz-Raum ist ein Funktionenraum, der besondere Regularitätseigenschaften besitzt, die uns bei der Fouriertransformation entgegenkommen. In diesem ersten Teil wird der Schwartz-Raum sowie sein Dualraum, der Raum der temperierten Distributionen, eingeführt und erste grundlegende Eigenschaften und Charakterisierungen angegeben.

Der Schwarz-Raum ist eine Teilmenge der glatten Funktionen auf R^n, deren Elemente auch nach Multiplizieren eines beliebigen Polynoms oder endlich vielen beliebigen partiellen Ableitungen noch beschränkt bleiben.

Definition 1 (Schwartz-Raum)**.**

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \middle| \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta \varphi)(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\right\}$$

Beispiel 1.

$$\varphi(x) := e^{-\delta|x|^2} \quad \delta > 0$$

ist im Schwartz-Raum.

Bemerkung 1.

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \qquad 1 \leq p < \infty$$

Die zweite Relation folgt durch folgendes Lemma:

Lemma 1. *$\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|\varphi\|_{L^p} \leq C_1(n)\|\varphi\|_\infty + C_2(n) \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{|x|^{2n}|\varphi(x)|\}$$

wobei C_1, C_2 Konstanten sind die nur von n abhängen.

Beweis.

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{L^p} &= \|\varphi\cdot 1_{|x|\le 1} + \varphi\cdot 1_{|x|>1}\|_{L^p}\\ &\le \|\varphi\cdot 1_{|x|\le 1}\|_{L^p} + \|\varphi\cdot 1_{|x|>1}\|_{L^p}\\ &= (\int_{|x|\le 1} |\varphi|^p dx)^{\frac{1}{p}} + (\int_{|x|>1} |\varphi|^p dx)^{\frac{1}{p}}\\ &\overset{(*)}{\le} \|\varphi\|_\infty \big(\int_{|x|\le 1} 1dx\big)^{\frac{1}{p}} + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^{2n}|\varphi(x)|\big(\int_{|x|>1} |x|^{-2np}dx\big)^{\frac{1}{p}}\\ &= \|\varphi\| C_1(n) + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{|x|^{2n}|\varphi(x)|\} C_2(n)\end{aligned}$$

□

Typisch für Beweise im Schwarz-Raum ist der Schritt (*), wo wir φ mit einem beliebigen Polynom multiplizieren dürfen, weil $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta\varphi)(x)| < \infty \ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{N}$. Damit erreichen wir die Konvergenz des zweiten Integrals. Weil $\mathscr{S}\subset L^1$, ist die Fourier-Transformation sowie die Fourier-Inversion auf $\mathscr{S}$ definiert und mit den beiden Relationen

$$\begin{aligned} D^\alpha \hat{f}(\xi) &= \mathcal{F}[(-ix)^\alpha f](\xi)\\ (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) &= \mathcal{F}[D^\alpha f](\xi)\end{aligned}$$

folgt

Theorem 1. *$\varphi\in\mathscr{S}$ impliziert, dass auch $\hat{\varphi}\in\mathscr{S}$*

Zusammen mit der Fourier-Inversion erhält man daraus folgendes Korollar:

Korollar 1. *Die Fourier-Transformation ist ein Automorphismus des Schwartz-Raumes.*

Aus der Definition des Schwartz-Raums ist direkt ersichtlich, dass das Produkt zweier Funktionen im Schwartz-Raum wiederum im Schwarz-Raum liegt. Dasselbe gilt auch für die Faltung:

Theorem 2. *Falls $\varphi,\psi\in\mathscr{S}$ dann folgt, dass $\varphi*\psi\in\mathscr{S}$*

Beweis. Es gilt

$$\varphi*\psi = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi*\psi}) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}\hat{\psi})\in\mathscr{S}$$

wobei wir Korollar 1 verwendet haben. □

Als nächstes definieren wir eine Metrik auf $\mathscr{S}$. Definiere

$$\rho_{\alpha,\beta}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|$$

Das ist eine abzählbare Familie von Normen auf $\mathscr{S}$: die Dreiecksungleichung und die Homogenität in $\mathbb{R}$ sind offensichtlich erfüllt. Dass $\varphi \equiv 0$ $\rho_{\alpha,\beta}(\varphi) \equiv 0$ impliziert, ist ebenfalls klar und umgekehrt folgt aus $\rho_{\alpha,\beta}(\varphi) = 0$, dass $D^\beta\varphi \equiv 0$. Dann kann aber φ unmöglich im Schwartz-Raum sein, aussert es gilt $\varphi \equiv 0$.
Wir definieren durch

$$d'_{\alpha,\beta}(\varphi, \psi) := \rho_{\alpha,\beta}(\varphi - \psi)$$

eine Metrik auf $\mathscr{S}$. Ordne jedem Paar (α, β) ein $n \in N$ zu und definiere

$$d_n := \frac{d'_n}{1 + d'_n} \leq 1$$

und schliesslich

$$d := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n \leq 1$$

Damit erhalten wir eine weitere Metrik auf $\mathscr{S}$. $\varphi_k \to \varphi$ bezüglich d ist äquivalent dazu, dass $\varphi_k \to \varphi$ für alle d_n und insbesondere für alle d'_n.

Proposition 1. *Mit der oben definierten Metrik d hat der Vektorraum $\mathscr{S}$ folgende Eigenschaften:*

i) Die Abbildung $\varphi(x) \mapsto x^\alpha D^\beta \varphi(x)$ ist stetig.

ii) $\lim_{|h|\to 0} \tau_h\varphi = \varphi$ für $\varphi \in \mathscr{S}$, wobei $\tau_h\varphi(x) := \varphi(x+h)$ der Translationsoperator ist.

iii) Es gilt

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\varphi - \tau_h\varphi}{h_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \qquad h = (0, \ldots, h_i, \ldots, 0)$$

iv) $\mathscr{S}$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

v) Die Fourier-Transformation ist ein Homeomorphismus auf $\mathscr{S}$.

vi) C_c^∞ ist dicht in $\mathscr{S}$.

vii) $\mathscr{S}$ *ist separabel.*

Nun definieren wir den Raum der temperierten Distributionen und betrachten einige typische Beispiele.

Definition 2 (Raum der temperierten Distributionen)**.** *Der Raum der temperierten Distributionen* $\mathscr{S}'$ *ist der Dualraum von* $\mathscr{S}$*.*

Beispiel 2. $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p \leq \infty,$

$$L(\varphi) = L_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

ist eine temperierte Distribution.

Beispiel 3. μ endliches Borel Mass,

$$L(\varphi) = L_\mu(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)d\mu(x)$$

ist eine temperierte Distribution.

Beispiel 4.

$$L(\varphi) := D^\beta \varphi(x_0) \quad \varphi \in \mathscr{S}$$

ist eine temperierte Distribution, weil die Normen $\rho_{\alpha,\beta}$ stetig sind.

Beispiel 5. Die Dirac δ-Distribution

$$\delta(\varphi) = \varphi(0)$$

Es ist üblich, für die Distributionen L_f, L_μ einfach f, μ zu schreiben.
Mit Hilfe der oben definierten Metrik auf $\mathscr{S}$, lässt sich eine besonders einfache Charakterisierung von temperierten Distributionen finden:

Theorem 3. *Ein lineares Funktional h auf* $\mathscr{S}$ *ist eine temperierte Distribution genau dann falls eine Konstante* $C > 0$ *und ganze Zahlen* l, m *exisitieren, sodass*

$$|L(\varphi)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha|\leq l \\ |\beta|\leq m}} \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}$$

Es ist erstaunlich, dass sich $L(\varphi)$ bereits mit einer endlichen Anzahl von $\rho_{\alpha,\beta}$ abschätzen lässt, falls L stetig ist. Das liegt daran, dass in der Definition der Metrik

$$d = \sum_{n\geq 1}^{\infty} 2^{-n} d_n$$

Terme mit grossem n sehr schwach gewichtet werden.

Beweis. Dass aus der Existenz von C, l, m die Stetigkeit von L folgt ist klar. Sei nun L stetig. Wir behaupten, dass

$$N_{\epsilon,l,m} := \Big\{\varphi \in \mathscr{S} | \sum_{\substack{|\alpha|\leq l \\ |\beta|\leq m}} \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) < \epsilon\Big\}$$

eine Umgebungsbasis um 0 in $\mathscr{S}$ ist. Das folgt aus der folgenden Überlegung: $\mathscr{S}$ ist ein metrischer Raum, also enthält jede Umgebung um den Ursprung die offene Kugel $B_\epsilon(0)$ für ein $\epsilon > 0$. Aber es ist klar, dass für ein ϵ' genügend klein, l, m genügend gross, $N_{\epsilon',l,m} \subset B_{\epsilon(0)}$ (hier haben wir unsere spezielle Metrik gebraucht!). Also ist $N_{\epsilon,l,m}$ eine Umgebungsbasis für $\mathscr{S}$.
Wegen der Stetigkeit von L gibt es ein $N_{\epsilon,l,m}$, sodass

$$\varphi \in N_{\epsilon,l,m} \Rightarrow |L(\varphi)| \leq 1 \tag{1}$$

Definiere

$$\|\varphi\|_{l,m} := \sum_{\substack{|\alpha|\leq l \\ |\beta|\leq m}} \rho_{\alpha,\beta}(\varphi)$$

Sei $\varphi \in \mathscr{S}$, $0 < \bar{\epsilon} < \epsilon$, dann gilt

$$\psi := (\frac{\bar{\epsilon}}{\|\varphi\|_{l,m}})\varphi \in N_{\epsilon,l,m}$$

Aus (1) folgt damit

$$|\frac{\bar{\epsilon}}{\|\varphi\|_{l,m}} L(\varphi)| = |L(\frac{\bar{\epsilon}}{\|\varphi\|_{l,m}}\varphi)| = L(\psi) \leq 1$$

und somit

$$|L(\varphi)| \leq \frac{1}{\bar{\epsilon}}\|\varphi\|_{l,m}$$

Daraus folgt das Theorem mit $C := \frac{1}{\bar{\epsilon}}$. □

Auf $\mathscr{S}'$ können Faltung, Differentation, Translation und Reflexion definiert werden. Zuerst definieren wir die Reflexion für beliebige Funktionen auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 3 (Reflexion)**.** *Sei g eine beliebige Funktion auf $\mathbb{R}^n$, dann definieren wir die Reflexion von g als*

$$\tilde{g}(x) := g(-x)$$

Falls u, φ und ψ im Schwartz-Raum sind, dann folgt mit Fubini, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u * \varphi)(x)\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)(\tilde{\varphi} * \psi)(x)dx$$

Dabei sind die Abbildungen $\psi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n}(u*\varphi)(x)\psi(x)dx$ und $\theta \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\theta(x)dx$ beides temperierte Distributionen. Schreiben wir für diese Distributionen $u*\varphi$ und u, dann lässt sich die letzte Gleichung schreiben als

$$(u * \varphi)(\psi) = u(\tilde{\varphi} * \psi)$$

Das motiviert die folgende Definition:

Definition 4 (Faltung von Distributionen)**.** *Seien $u \in \mathscr{S}', \varphi \in \mathscr{S}$. Definiere*

$$(u * \varphi)(\psi) = u(\tilde{\varphi} * \psi) \qquad \forall \psi \in \mathscr{S}$$

Die Faltung $u * \varphi$ von zwei Distributionen lässt sich auch durch eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ schreiben:

Theorem 4. *Falls $u \in \mathscr{S}'$ und $\varphi \in \mathscr{S}$, dann gilt $u * \varphi = L_f$, wobei f gegeben ist durch*

$$f(x) = u(\tau_x \tilde{\varphi})$$

Weiter gilt, dass f in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass

$$(u * \varphi)(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) f(t)dt \qquad \forall \psi \in \mathscr{S}$$

gilt. Wir schreiben

$$\begin{aligned}(u * \varphi)(\psi) = u(\tilde{\varphi} * \psi) &= u(\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(x - t)\psi(t)dt) \\ &= u(\int_{\mathbb{R}^n} (\tau_t \tilde{\varphi})(x)\psi(t)dt)\end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass die Riemann-Summen des letzten Integrals in $\mathscr{S}$ konvergieren, indem man verwendet, dass sowohl φ wie auch ψ schnell abfallen und deshalb nur ein beschränkter Teil des $\mathbb{R}^n$ wesentlich zum Integral beitragen. Mit $I(j,k)$ eine Partitionierung abhängig von einem Restterm $R(k)$ mit $\|R(k)\|_{\mathscr{S}} \leq \frac{1}{k}$, $t_{j,k} \in I(j,k)$ können wir schreiben

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\tau_t \tilde{\varphi})\psi(t)dt) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\tau_{t_{j,k}})(x)\psi(t_{j,k})|I(j,k)|) + R(k)$$

und deshalb

$$\begin{aligned} u(\int_{\mathbb{R}^n}(\tau_t\tilde{\varphi})\psi(t)dt) &= u(\lim_{k\to\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\tau_{t_{j,k}})(x)\psi(t_{j,k})|I(j,k)|) \\ &= \lim_{k\to\infty} u(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\tau_{t_{j,k}}(x)\psi(t_{j,k})|I(j,k)|) \\ &= \lim_{k\to\infty}(\sum_{j\in\mathbb{Z}}u(\tau_{t_{j,k}}(x)\psi(t_{j,k}))|I(j,k)|) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(\tau_t\tilde{\varphi})\psi(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\psi(t)dt \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass u stetig und linear ist und die Riemannsumme gleichmässig konvergiert.
Als nächstes zeigen wir, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt. Sei $h := (0,\ldots,h_j,\ldots,0)$. Bemerke, dass

$$\frac{1}{h_j}(\tau_{x+h}\tilde{\varphi} - \tau_x\tilde{\varphi}) \to -\tau_x(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_j}) \quad \text{für } h_j \to 0$$

in der Topologie von $\mathscr{S}$ wegen Proposition 1, Aussage (iii). Weil u stetig ist, folgt daraus

$$\frac{1}{h_j}(f(x+h) - f(x)) = u(\frac{1}{h_j}(\tau_{x+h}\tilde{\varphi} - \tau_x\tilde{\varphi})) \overset{h_j\to 0}{\to} u(-\tau_x(\frac{\partial\tilde{\varphi})}{\partial x_j})$$

und $x \mapsto u(-\tau_x(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_j}))$ ist stetig wegen Proposition 1, Aussage (ii). Weil $\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_j} \in \varphi$ können wir dieses Argument wiederholen und zeigen, dass $D^\beta f$ exisitiert und stetig ist für alle $\beta \in \mathbb{N}^n$. $\square$

Seien wiederum u, φ im Schwartz-Raum. Integriert man partiell erhält man die folgende Identität:

$$\int_{\mathbb{R}^n}(D^\beta u)(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\beta|}\int_{\mathbb{R}^n} u(x)(D^\beta\varphi)(x)dx$$

Die Abbildungen $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n}(D^\beta u)(x)\varphi(x)dx$ und $\psi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} u(x)(D^\beta\varphi)(x)dx$ sind temperierte Distributionen, die wir mit $(D^\beta u)$ und u bezeichnen. Dann gilt also

$$(D^\beta u)(\varphi) = (-1)^{|\beta|}u(D^\beta\varphi).$$

Genau gleich definieren wir deshalb die Ableitung einer allgemeinen Distribution.

Definition 5 (Ableitung einer Distribution)**.** *Die Ableitung einer Distribution ist definiert durch*

$$(D^\beta u)(\varphi) := (-1)^{|\beta|} u(D^\beta \varphi)$$

$u \in \mathscr{S}', \varphi \in \mathscr{S}, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Genau gleich wie oben, sind auch die folgenden beiden Definitionen motiviert durch das Verhalten der Distribution

$$u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)dx \quad u, \varphi \in \mathscr{S}$$

wenn man den Translationsoperator bzw. den Reflexionsoperator auf u anwendet. Wiederum können beide Operatoren auf das Argument φ geschoben werden.

Definition 6 (Translationsoperator auf $\mathscr{S}'$)**.**

$$\tau_h u(\varphi) := u(\tau_{-h}\varphi)$$

$u \in \mathscr{S}', \varphi \in \mathscr{S}, h \in \mathbb{R}^n$.

Definition 7 (Reflexion auf $\mathscr{S}'$)**.**

$$\tilde{u}(\varphi) := u(\tilde{\varphi})$$

$u \in \mathscr{S}', \varphi \in \mathscr{S}$.