Schwartz-Raum und gemässigte Distributionen II

Marc Stephan Paul Ziegler

1 Einige Operationen auf $\mathscr{S}'$

Wir beginnen damit, verschiedene Operationen von $\mathscr{S}$ auf $\mathscr{S}'$ auszudehnen:

Fouriertransformation Da $\mathscr{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathscr{S} \Rightarrow \hat{\varphi} \in \mathscr{S}$ gilt für $u, \varphi \in \mathscr{S}$, wie wir in einem früheren Vortrag gesehen haben:

$$\hat{u}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\hat{\varphi}(x)\mathrm{d}x = u(\hat{\varphi}) \tag{1}$$

Die rechte Seite von (1) ist aber nun wohldefiniert für alle $u \in \mathscr{S}'$ und für alle $\varphi \in \mathscr{S}$. Wir definieren also einfach $\hat{u}$ für ein beliebiges $u \in \mathscr{S}'$ durch (1).

Definition (Fouriertransformation einer Distribution)**.** Für $u \in \mathscr{S}'$ sei $\hat{u} : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ die Abbildung definiert durch $\varphi \mapsto u(\hat{\varphi})$ für $\varphi \in \mathscr{S}$.

Da die Abbildung $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}, \varphi \mapsto \hat{\varphi}$ stetig ist, ist für $u \in \mathscr{S}'$ auch $\hat{u}$ als Verknüpfung stetiger Abbildungen wieder stetig, d.h $\hat{u} \in \mathscr{S}'$. Diese Definition der Fouriertransformation ist eine Fortsetzung der Fouriertransformation auf $\mathscr{S}$, dass heisst wenn man ein $u \in \mathscr{S}$ als Distribution $L_u : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ auffasst ist $\widehat{L_u} = L_{\hat{u}}$. Da $\mathscr{F}$ ein Automorphismus von $\mathscr{S}$ ist, ist zudem auch die Fouriertransformation $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}' : u \mapsto \hat{u}$ ein Automorphismus.

Translation Auf die gleiche Weise lässt sich auch der Translationsoperator auf $\mathscr{S}'$ fortsetzen: Sei $h \in \mathbb{R}^n, u, \varphi \in \mathscr{S}$. Betrachtet man u und $\tau_h u$ als Distributionen, so erhält man mit der Substitution $y = x - h$

$$\begin{aligned}(\tau_h u)(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_h u)(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-h)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi(y+h)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)(\tau_{-h}\varphi)(y)\mathrm{d}y = u(\tau_{-h}\varphi)\end{aligned}$$

Wie bei der Fouriertransformation kann man damit den Translationsoperator fortsetzen:

Definition (Translation einer Distribution)**.** Für $u \in \mathscr{S}'$ sei $\tau_h u : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ die Abbildung gegeben durch $\varphi \mapsto u(\tau_{-h}\varphi)$

Da der Translationsoperator auf $\mathscr{S}$ stetig ist, ist die so definierte Abbildung $\tau_h u$ als Verknüfung stetiger Funktionen wieder in $\mathscr{S}'$.

Spiegelung Für $u \in \mathscr{S}$ ist die Spiegelung $\tilde{u} \in \mathscr{S}$ von u definiert durch $\tilde{u}(x) = u(-x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Für $u, \varphi \in \mathscr{S}$ erhält man mit der Substitution $y = -x$

$$\tilde{u}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(-x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi(-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\tilde{\varphi}(y)\mathrm{d}y = u(\tilde{\varphi})$$

So kann die Spiegelung einer Distribution definiert werden:

Definition. Für $u \in \mathscr{S}'$ sei $\tilde{u} : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ die Abbildung definiert durch $\varphi \mapsto u(\tilde{\varphi})$ für $\varphi \in \mathscr{S}$.

Da die Spiegelung $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ von $\mathscr{S}$ auf sich selbst stetig ist, ist für $u \in \mathscr{S}'$ auch $\tilde{u} \in \mathscr{S}'$.

Produkt Für $u, \psi, \varphi \in \mathscr{S}$ gilt

$$(u\psi)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\psi(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = u(\psi\varphi)$$

Dies motiviert die folgende Definition des Produkts von $u \in \mathscr{S}'$ und $\psi \in \mathscr{S}$:

Definition. Für $u \in \mathscr{S}'$ und $\psi \in \mathscr{S}$ sei $u\psi : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ die Abbildung gegeben durch $\varphi \mapsto u(\psi\varphi)$ für $\varphi \in \mathscr{S}$.

Da das Produkt auf $\mathscr{S}$ stetig ist, ist für $u \in \mathscr{S}'$ und $\psi \in \mathscr{S}$ auch $u\psi \in \mathscr{S}'$.

Faltung Für $u, \psi, \varphi \in \mathscr{S}$ folgt mit Fubini

$$\begin{aligned} u * \psi(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\tilde{\psi}(y-x)\mathrm{d}x u(y)\mathrm{d}y = u(\tilde{\psi} * \varphi) \end{aligned}$$

Also definiert man die Faltung von $u \in \mathscr{S}'$ und $\psi \in \mathscr{S}$ wie folgt:

Definition. Für $u \in \mathscr{S}'$ und $\psi \in \mathscr{S}$ sei $u * \psi : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ die Abbildung gegeben durch $\varphi \mapsto u(\tilde{\psi} * \varphi)$ für $\varphi \in \mathscr{S}$.

Man beachte, dass man so nur $u \in \mathscr{S}'$ und $\psi \in \mathscr{S}$ miteinander multiplizieren oder falten kann, nicht aber $u \in \mathscr{S}'$ und $\psi \in \mathscr{S}'$. Wie wir gesehen haben, gilt $\widehat{(u * \psi)} = \hat{u}\hat{\psi}$ für $u, \psi \in \mathscr{S}$. Analog dazu gilt:

Lemma 1. *Für $u \in \mathscr{S}'$ und $\psi \in \mathscr{S}$ gilt*

$$\widehat{(u * \psi)} = \hat{u}\hat{\psi}$$

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $\widehat{(u * \psi)}(\varphi) = \hat{u}\hat{\psi}(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathscr{S}$. In einem früheren Vortrag haben wir gesehen, dass für $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{2\pi i t x} \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(-t) e^{-2\pi i t x} \mathrm{d}t = \hat{\tilde{\hat{f}}}(x).$$

Da $\mathscr{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ und weil mit $\varphi \in \mathscr{S}$ auch $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}$ ist dies insbesondere für $f = \varphi \in \mathscr{S}$ der Fall. Diese Gleichung lässt sich auch schreiben als $\mathscr{F}^{-1}(\varphi) = \hat{\tilde{\varphi}}$. Ausserdem folgt für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit der Substitution s=-t für $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\hat{\tilde{f}}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(-t) e^{-2\pi i t x} \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} f(s) e^{-2\pi i s(-x)} \mathrm{d}s = \hat{f}(-x) = \tilde{\hat{f}}(x).$$

Für $\psi, \varphi \in \mathscr{S}$ gilt $\tilde{\psi} * \hat{\varphi} \in \mathscr{S}$, $\widetilde{\psi\varphi} = \tilde{\psi}\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\tilde{\varphi}} = \varphi$. Daraus folgt

$$\mathscr{F}^{-1}(\tilde{\psi} * \hat{\varphi}) = \widehat{\widetilde{\tilde{\psi} * \hat{\varphi}}} = \widetilde{\widehat{\tilde{\psi} * \hat{\varphi}}} = \widetilde{\hat{\tilde{\tilde{\psi}}}\hat{\hat{\varphi}}} = \tilde{\hat{\tilde{\tilde{\psi}}}}\tilde{\hat{\hat{\psi}}} = \hat{\tilde{\tilde{\psi}}}\hat{\tilde{\hat{\varphi}}} = \hat{\psi}\varphi.$$

Also folgt aus der Definition von Faltung, Produkt und Fouriertransformation für Distributionen für alle $\varphi \in \mathscr{S}$

$$\widehat{u * \psi}(\varphi) = (u * \psi)(\hat{\varphi}) = u(\tilde{\psi} * \hat{\varphi}) = u(\widehat{\hat{\psi}\varphi}) = \hat{u}(\hat{\psi}\varphi) = \hat{u}\hat{\psi}(\varphi).$$

$\square$

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wollen wir nun Operatoren auf L^p-Räumen betrachten, welche mit Translationen kommutieren. Wir werden die eben eingeführten Operationen auf $\mathscr{S}'$ anwenden, um diese Operatoren genauer zu beschreiben.

2 Operatoren, die mit Translationen kommutieren

Es sei $B : V \to W$ ein linearer Operator zwischen zwei Vektorräumen V und W, welche aus Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ bestehen und invariant unter Translationen sind, dass heisst für die gilt $\tau_h(V) \subset V$ und $\tau_h(W) \subset W$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$. Im Folgenden werden V und W immer L^p-Räume sein.

Definition. B kommutiert mit Translationen, falls $\tau_h \circ B = B \circ \tau_h$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$.

Ein Beispiel für einen Operator, welcher mit Translationen kommutiert ist der Faltungsoperator: Sei $1 \leq p \leq \infty$. Betrachte $V = L^1(\mathbb{R}^n)$, $W = L^p(\mathbb{R}^n)$ und $Bg = f * g$ für ein festes $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und alle $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\|Bg\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ d.h B ist beschränkt mit $\|B\|_{L(V,W)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ und es gilt für $x, h \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}(\tau_h(Bg))(x) = Bg(x-h) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-h-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\tau_h g(x-y)\mathrm{d}y \\ &= (f * \tau_h g)(x) = (B(\tau_h g))(x)\end{aligned}$$

d.h. B kommutiert mit Translationen. Wir wollen nun zeigen, dass sich jeder beschränkte Operator $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ als Faltung schreiben lässt, im Allgemeinen jedoch nicht mit einer Funktion sondern mit einer Distribution:

Satz 1. *Sei $B : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n), 1 \leq p, q \leq \infty$ ein linearer, beschränkter Operator, der mit Translationen kommutiert. Dann gibt es eine eindeutige temperierte Distribution u so dass $B\varphi = u * \varphi$ für alle $\varphi \in \mathscr{S}$.*

Um diesen Satz zu beweisen benötigen wir zuerst noch ein Lemma. Zunächst erweitern wir den Begriff der Ableitung auf L^p-Räume:

Definition. Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $1 \leq k \leq n$. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ heisst differenzierbar in Richtung x_k in der L^p-Norm falls es ein $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gibt, so dass

$$\lim_{h_k \to 0} \frac{\tau_{-h} f(x) - f(x)}{h_k} = \lim_{h_k \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h_k} = g(x) \text{ (in } L^p(\mathbb{R}^n))$$

für $h = (0, \ldots, 0, h_k, 0, \ldots, 0)$. In diesem Fall nennen wir $\frac{\partial f}{\partial x_k} := g$ die partielle Ableitung von f in Richtung x_k in der L^p-Norm. Wie bei den gewöhnlichen partiellen Ableitung sei $D^\beta f := \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} f$ für einen Multiindex $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, falls alle vorkommenden partiellen Ableitungen in der L^p-Norm existieren. Analog zu den gewöhnlichen Ableitungen kann man für Ableitungen in der L^p-Norm Produktregeln beweisen.

Es gilt der folgende Satz, wie wir im Vortrag über die Fouriertransformation gesehen haben:

Satz 2. *Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und β ein Multiindex, so dass $D^\beta f$ in der L^1-Norm existiert. Dann gilt*

$$\widehat{D^\beta f}(t) = (2\pi i)^{|\beta|} t^\beta \hat{f}(t), \text{ wobei für } t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \text{ gilt } t^\beta = t_1^{\beta_1} \cdots t_n^{\beta_n}.$$

Wir zeigen nun folgendes Lemma.

Lemma 2. *Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Falls für ein $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ die Ableitung $D^\beta f$ in der L^p-Norm für alle $\beta \in \mathbb{N}^n$ mit $|\beta| \leq n+1$ existiert, dann stimmt f fast überall mit einer stetigen Funktion g überein, und es gibt eine nur von n und p abhängige Konstante C so dass gilt*

$$|g(0)| \leq C \sum_{|\beta| \leq n+1} \|D^\beta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst denn Fall $p = 1$. Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Für $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \leq a_1 + \dots + a_n$. Daraus folgt, dass es eine nur von n abhängige Konstante C' gibt, so dass

$$(1 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}} \leq (1 + |x_1| + \dots + |x_n|)^{n+1} \leq C' \sum_{|\beta| \leq n+1} |x|^\beta. \tag{2}$$

Damit folgt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ aus $(2\pi)^{-|\beta|} \leq 1$ für $0 \leq |\beta| \leq n+1$ und $\|\widehat{D^\beta f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|D^\beta f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(x)| &\leq C'(1 + |x|^2)^{\frac{-(n+1)}{2}} \sum_{|\beta| \leq n+1} |x^\beta \hat{f}(x)| \\
&= C'(1 + |x|^2)^{\frac{-(n+1)}{2}} \sum_{|\beta| \leq n+1} |(2\pi)^{-|\beta|} \widehat{D^\beta f}(x)| \\
&\leq C'(1 + |x|^2)^{\frac{-(n+1)}{2}} \sum_{|\beta| \leq n+1} \|D^\beta f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

wobei hier die erste Ungleichung aus (2) und die Gleichung aus Satz 2 folgt. Weil $A := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{-(n+1)}{2}} \mathrm{d}x < \infty$ folgt daraus mit $C := AC'$

$$\|\hat{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)| \mathrm{d}x \leq C \sum_{|\beta| \leq n+1} \|D^\beta f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty \tag{3}$$

Da $\hat{f}$ also in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, gilt fast überall, wie wir im Vortrag über die Fouriertransformation haben, $f(x) = g(x)$ für $g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{2\pi i t x} \mathrm{d}t$. g ist stetig und es gilt wegen (3)

$$|g(0)| = |\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) \mathrm{d}t| \leq C \sum_{|\beta| \leq n+1} \|D^\beta f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

wie gewünscht.

Sei nun $p > 1$. Die Idee hier ist, den Beweis auf denn Fall $p = 1$ zurückzuführen, indem man f abschneidet. Zu $r > 0$ wähle $\varphi \in C_c^\infty$ mit $\varphi(x) = 1$ für $|x| \leq r$ und $\varphi(x) = 0$ für $x > 2r$. Dann erfüllt φf die Bedingungen des Lemmas für $p = 1$. Also gibt es eine stetige Funktion h und eine Konstante C mit $\varphi f = h$ fast überall und

$$|h(0)| \leq C \sum_{|\beta| \leq n+1} \|D^\beta (\varphi f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \tag{4}$$

Da $\varphi(x) = 1$ für $|x| \leq r$ folgt daraus, das $f(x) = h(x)$ für fast alle $|x| \leq r$. Da dies für alle $r > 0$ gilt, gibt es also eine stetige Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f = g$ fast überall.

Es ist noch die Abschätzung für $|g(0)|$ zu beweisen. Fixiere $r = 1$. Wähle $1 \leq q \leq \infty$ so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Fixiere $\beta \in \mathbb{N}^n$ mit $|\beta| \leq n+1$. Es gilt

$D^\beta(\varphi f) = \sum_{\mu+\nu=\beta} \binom{\beta}{\mu} (D^\mu f)(D^\nu \varphi)$, daraus folgt mit $C'' := \max_{\mu+\nu=\beta} \binom{\beta}{\mu}$, $B := \|\chi_{B_2(0)}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ und Hölder

$$
\begin{aligned}
\|D^\beta(\varphi f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{|x|\leq 2} \sum_{\mu+\nu=\beta} \binom{\beta}{\mu} |D^\mu f(x)||D^\nu \varphi(x)| \mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{\mu+\nu=\beta} C'' \|D^\nu \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{|x|\leq 2} |D^\mu f(x)| \mathrm{d}x \\
&\leq A \sum_{|\mu|\leq|\beta|} \int_{|x|\leq 2} |D^\mu f(x)| \mathrm{d}x = A \sum_{|\mu|\leq|\beta|} \|(D^\mu f)\chi_{B_{2(0)}}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq A \sum_{|\mu|\leq|\beta|} \|D^\mu f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_2(0)}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq AB \sum_{|\mu|\leq|\beta|} \|D^\mu f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned} \tag{5}
$$

wobei $A = C'' \max_{|\nu|\leq|\beta|} \|D^\nu \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Aus (4) und (5) folgt nun die Existenz einer Konstanten K, so dass

$$|g(0)| = |h(0)| \leq K \sum_{|\beta|\leq n+1} \|D^\beta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Nun können wir uns dem Beweis von Satz 1 zuwenden. Zur Motivation betrachten wir noch einmal das Beispiel der Faltung mit einer Funktion: Es sei $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann definiert $B : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) : \varphi \mapsto u * \varphi$ einen beschränkten Operator der mit Translationen kommutiert. Man kann zeigen, dass für $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $u * \varphi$ stetig ist. Es gilt

$$u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\tilde{\varphi}(0-x)\mathrm{d}x = (u * \tilde{\varphi})(0) = B\tilde{\varphi}(0), \tag{6}$$

das heisst, man kann u aus B durch (6) zurückgewinnen. Der gleiche Ansatz wird auch beim Beweis von Satz 1 zum Ziel führen. Das Problem dabei ist aber, dass man in der Situation von Satz 1 a priori nur weiss, das $B\tilde{\varphi} \in L^q(\mathbb{R}^n)$, und dass daher der Ausdruck $B\tilde{\varphi}(0)$ noch keinen Sinn macht. Deshalb zeigen wir zuerst mit Lemma 2, dass $B\varphi$ eine stetige Funktion ist. Dafür ist die Eigenschaft, dass B mit Translationen kommutiert, von entscheidender Beudeutung:

Beweis von Satz 1. Es sei $\varphi \in \mathscr{S}$ und $h = (0, \ldots, h_k, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ für ein $1 \leq k \leq n$. Dann gilt

$$\frac{\tau_{-h}(B\varphi) - B\varphi}{h_k} = \frac{B(\tau_{-h}\varphi) - B\varphi}{h_k} = B(\frac{\tau_{-h}\varphi - \varphi}{h_k}). \tag{7}$$

$\frac{\tau_{-h}\varphi - \varphi}{h_k}$ konvergiert in $\mathscr{S}$ gegen $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ für $h_k \to 0$, also auch in der L^p-Norm. Da $B : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ stetig ist, folgt dass für $h_k \to 0$ $B(\frac{\tau_{-h}\varphi - \varphi}{h_k})$ in

$L^q(\mathbb{R}^n)$ gegen $B\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ konvergiert. Wegen (7) folgt daraus, dass die Ableitung von $B\varphi$ in Richtung x_k in der L^q-Norm existiert und dass $\frac{\partial(B\varphi)}{\partial x_k} = B\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$. Daraus folgt induktiv dass für alle $\beta \in \mathbb{N}^n$ die partielle Ableitung $D^\beta(B\varphi)$ in der L^q-Norm existiert und dass $D^\beta(B\varphi) = B(D^\beta\varphi)$. Insbesondere erfüllt $B\varphi$ die Bedingungen von Lemma 2. Es gibt also eine stetige Funktion g_φ mit $g_\varphi = B\varphi$ fast überall und eine Konstante C, so dass

$$\begin{aligned} |g_\varphi(0)| &\leq C \sum_{|\beta|\leq n+1} \|D^\beta(B\varphi)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = C \sum_{|\beta|\leq n+1} \|B(D^\beta\varphi)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\|B\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n),L^q(\mathbb{R}^n))} \sum_{|\beta|\leq n+1} \|D^\beta\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C' \sum_{|\beta|\leq n+1} \|D^\beta\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \||x|^{2n} D^\beta\varphi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \tag{8}$$

für eine geeignete Konstante C'. Dass die letzte Ungleichung für gross genuges C' gilt wurde im letzten Vortrag gezeigt. Dort wurde auch gezeigt, dass aus Abschätzung (8) folgt, dass die Zuweisung $u_1 : \varphi \mapsto g_\varphi(0)$ eine stetiges Funktional u_1 definiert (Die Linearität von u_1 folgt aus der Linearität von B.). Wie oben angedeutet ist nun $u := \tilde{u_1}$ die gesuchte Distribution. Im letzten Vortrag wurde gezeigt, dass $u * \varphi$ die Funktion $x \mapsto u(\tau_x\tilde{\varphi})$ ist. Damit folgt nun für alle $\varphi \in \mathscr{S}$ und für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (u * \varphi)(x) = u(\tau_x\tilde{\varphi}) = u(\widetilde{\tau_{-x}\varphi}) = \tilde{u}(\tau_{-x}\varphi) = u_1(\tau_{-x}\varphi) = g_{\tau_{-x}\varphi}(0) \\ = B(\tau_{-x}\varphi(0)) = (\tau_{-x}(B\varphi))(0) = B\varphi(x). \end{aligned}$$

Aus der Gleichung $u(\tau_x\tilde{\varphi}) = (B\varphi)(x)$ folgt zudem, dass u eindeutig bestimmt ist, also ist alles gezeigt. $\square$

Definition ((L^p, L^q))**.** Mit (L^p, L^q) bezeichnen wir die Menge aller temperierten Distributionen u, für die ein $A > 0$ existiert, sodass für alle $\varphi \in \mathscr{S}$ gilt $u * \varphi \in L^q$ und $\|u * \varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq A\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Der wie folgt einem $u \in (L^p, L^q)$ zugeordnete Operator $B : L^p \cap \mathscr{S} \to L^q$, $\varphi \mapsto u * \varphi$, ist linear, durch A beschränkt und kommutiert mit Translationen, da für alle $x, h \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\begin{aligned} (\tau_h(u * \varphi))(x) = (u * \varphi)(x - h) = u(\tau_{x-h}\tilde{\varphi}) \\ = u(\tau_x\tau_{-h}\tilde{\varphi}) = u(\tau_x\widetilde{\tau_h\varphi}) = (u * \tau_h\varphi)(x) \end{aligned}$$

Da B beschränkt und somit gleichmässig stetig ist, $\mathscr{S}$ dicht in L^p liegt und L^q vollständig ist, besitzt B eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung $\bar{B} : L^p \to L^q$. Auf Grund der Stetigkeit von B und $\tau_h : L^s \to L^s, 1 \leq s \leq \infty$, ist $\bar{B}$ ebenfalls linear, beschränkt und kommutiert mit Translationen. Zusammen mit Satz 1 erhalten wir somit eine Bijektion zwischen (L^p, L^q) und den linearen, beschränkten Operatoren: $L^p \to L^q$, welche mit Translation kommutieren.

Im Fall $p = q = 2$ lässt sich für (L^2, L^2) eine einfache Charakterisierung angeben:

Satz 3. *Die temperierte Distribution u ist genau dann in (L^2, L^2), wenn ein $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ existiert, sodass $\hat{u} = b$. In diesem Fall ist $\|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ gleich der Operatornorm von $B : L^2 \cap \mathscr{S} \to L^2, \quad \varphi \mapsto u * \varphi$.*

Beweis. Sei $\varphi_0(x) := e^{-\pi|x|^2} \in \mathscr{S}$. Vom Vortrag über die Fourier-Inversion wissen wir, dass $\hat{\varphi}_0 = \varphi_0$. Für $u \in (L^2, L^2)$ gilt nach Lemma 2 und dem Satz von Plancherel $\hat{u}\hat{\varphi}_0 = \widehat{u * \varphi_0} =: \Phi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Nun definieren wir $b(x) := e^{\pi|x|^2}\Phi_0(x)$ $= \Phi_0(x)/\hat{\varphi}_0(x)$ und behaupten, dass für alle $\varphi \in \mathscr{S}$ gilt:

$$\widehat{u * \varphi} = b\hat{\varphi}$$

Die rechte Seite vom Gleichheitszeichen, $b\hat{\varphi}$, ist a priori keine temperierte Distribution, da wir nicht wissen, ob $b\hat{\varphi}$ in einem L^s, $1 \leq s \leq \infty$, liegt. Wir werden nun zeigen, dass $\widehat{u * \varphi}(x) = b(x)\hat{\varphi}(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und somit $b\hat{\varphi} \in L^2$. Nach dem „Fundamentallemma der Variationsrechnung“ genügt es zu zeigen, dass für alle $\psi \in C_c^\infty$ gilt: $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u * \varphi}(x)\psi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} b(x)\hat{\varphi}(x)\psi(x)\mathrm{d}x$. Mit $\psi \in C_c^\infty$ ist auch $(\psi/\hat{\varphi}_0)(x) = \psi(x)e^{\pi|x|^2} \in C_c^\infty$. Wir erhalten daher für alle $\psi \in C_c^\infty$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u * \varphi}(x)\psi(x)\mathrm{d}x &= (\widehat{u * \varphi})(\psi) = (\hat{u}\hat{\varphi})(\psi) \\
&= \hat{u}(\hat{\varphi}\hat{\varphi}_0\psi/\hat{\varphi}_0) = (\hat{u}\hat{\varphi}_0)(\hat{\varphi}\psi/\hat{\varphi}_0) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(x)\hat{\varphi}(x)e^{\pi|x|^2}\psi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} b(x)\hat{\varphi}(x)\psi(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Somit ist $\widehat{u * \varphi} = b\hat{\varphi}$ und da $u \in (L^2, L^2)$, gibt es ein $A > 0$, sodass für alle $\varphi \in \mathscr{S}$ gilt:

$$\|b\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{u * \varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u * \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq A\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = A\|\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Daraus folgern wir, dass $\|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq A$ und insbesondere $b \in L^\infty$: Der Operator $T : L^2 \cap \mathscr{S} \to L^2, \quad \varphi \mapsto b\varphi$, besitzt eine eindeutige stetige Fortsetzung $\bar{T}$ auf L^2. Zu $f \in L^2$ wählen wir eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}, \varphi_n \in \mathscr{S}$, die in L^2 und punktweise fast überall gegen f konvergiert. Da nach Konstruktion $b < \infty$ fast überall, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b\varphi_n = bf$ punktweise fast überall. Da $b\varphi_n = \bar{T}(\varphi_n) \to \bar{T}(f)$ in L^2 für $n \to \infty$, erhalten wir $\bar{T}(f) = bf$ fast überall und somit $\|bf\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq A\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Angenommen $\|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} > A$, dann gibt es eine messbare Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem, endlichem Lebesguemass, sodass für ein $\varepsilon > 0$ und alle $x \in M$ gilt $b(x) > A+\varepsilon$. Für $\text{Ł}^2 \ni f = \chi_M$ gilt: $\|bf\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \|(A+\varepsilon)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} > A\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ im Widerspruch zur obigen Ungleichung.

Da $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, kann b als Distribution aufgefasst werden und wir zeigen $\hat{u} = b$: Da C_c^∞ dicht in $\mathscr{S}$ liegt und die temperierten Distributionen stetig sind, genügt es zu zeigen, dass für alle $\psi \in C_c^\infty$ gilt: $\hat{u}(\psi) = b(\psi)$. Wir haben gezeigt, dass für alle $\varphi \in \mathscr{S}$ und $\psi \in C_c^\infty$ gilt: $\hat{u}(\hat{\varphi}\psi) = (b\hat{\varphi})(\psi) = b(\hat{\varphi}\psi)$. Wählen wir nun $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}$ mit $\hat{\varphi}(x) = 1$ für x im Träger von ψ, erhalten wir $\hat{u}(\psi) = \hat{u}(\hat{\varphi}\psi) = b(\hat{\varphi}\psi) = b(\psi)$, da auf $\mathbb{R}^n$ die Funktionen ψ und $\hat{\varphi}\psi$ übereinstimmen. Somit ist $\hat{u} = b$ und die eine Richtung im Satz 3 ist gezeigt.

Betrachten wir umgekehrt ein $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und bezeichnen mit u die temperierte Distribution mit $\hat{u} = b$, erhalten wir mit Lemma 2, Plancherel und Hölder für alle $\varphi \in \mathscr{S}$:

$$\begin{aligned}\|u * \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|\widehat{u * \varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|b\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

Folglich ist $u \in (L^2, L^2)$.

Für die Operatornorm von $B : \varphi \mapsto u * \varphi$ gilt auf Grund der obigen Ungleichung, dass $\|B\|_{L(L^2,L^2)} \leq \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ und der zuvor gezeigten Ungleichung $\|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq A$, für alle A mit $\forall \varphi \in \mathscr{S} : \|u * \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq A\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, dass $\|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|B\|_{L(L^2,L^2)}$. Damit folgt Satz 3. $\square$

Eine einfache Charakterisierung der (L^p, L^q) Räume wie im Fall (L^2, L^2) ist im Allgemeinen nicht bekannt, jedoch für $p = q = 1$, was wir nun sehen werden.

Für ein endliches Borelmass μ (d.h. eine komplexwertige, auf der Borelalgebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ definierte, σ-additive Mengenfunktion) gilt für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit Fubini:

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mathrm{d}\mu(y)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,\mathrm{d}|\mu|(y)\right\}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}|\mu|(y) \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}|\mu|\end{aligned}$$

Dabei ist das Mass $|\mu|$ die totale Variation von μ, d.h. für $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$: $|\mu|(E) := \sup\sum_{i=1}^\infty |\mu(E_i)|$, wobei das Supremum über alle disjunkten Zerlegungen $E = \cup_{i=1}^\infty E_i$ mit $E_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ genommen wird.

Dies zeigt mit $f = \varphi \in \mathscr{S}$, $(\mu * \varphi)(x) = \mu(\tau_x\tilde{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(-(y-x))\mathrm{d}\mu(y)$, dass der Operator $\varphi \mapsto \mu * \varphi$ in (L^1, L^1) ist. Der folgende Satz sagt, dass alle Operatoren in (L^1, L^1) von dieser Art sind. Wir erhalten also auch eine einfache Charakterisierung im Fall (L^1, L^1):

Satz 4. *Die temperierte Distribution u ist genau dann in (L^1, L^1), wenn u ein endliches Borelmass ist. In diesem Fall ist die totale Variation von u auf $\mathbb{R}^n$ gleich der Operatornorm von $B : L^1 \cap \mathscr{S} \to L^1, \quad \varphi \mapsto u * \varphi$.*

Im Folgenden skizzieren wir den Beweis der noch ausstehenden Richtung.

Beweis. Die Menge aller endlichen Borelmasse $M = M(\mathbb{R}^n)$ bildet zusammen mit der Norm der totalen Variation auf $\mathbb{R}^n$ einen Banachraum. In M eingebettet betrachten wir $L^1(\mathbb{R}^n)$, indem $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ das Mass μ_f, definiert durch $\mu_f(F) := \int_F f(x)\mathrm{d}x$ für $F \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, zugeordnet wird. Dabei ist die Norm von μ_f gerade $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

$M(\mathbb{R}^n)$ identifizieren wir mittels dem Darstellungssatz von Riesz mit dem Dualraum von $(C_0(\mathbb{R}^n), \sup_{\mathbb{R}^n} |\cdot|)$, indem wir $\mu \in M$ das lineare Funktional $C_0 \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)$ zuordnen.

Sei $u \in (L^1, L^1)$. Wir betrachten die Familie von $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktionen $u_\varepsilon = u * W(\cdot, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, wobei $\mathscr{S} \ni W(x,\varepsilon) = (4\pi\varepsilon)^{-n/2}\exp(-\frac{|x|^2}{4\varepsilon})$. Da $\|W(x,\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$ und nach Voraussetzung an u, gilt für ein $A > 0$ und alle $\varepsilon > 0$: $\|u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq A\|W(x,\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = A$. Da zudem $C_0(\mathbb{R}^n)$ separabel ist und wir M mit dem Dualraum von $C_0(\mathbb{R}^n)$ identifiziert haben, gibt es nach dem Satz von Banach-Alaoglu ein $\mu \in M$ und eine Nullfolge $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $u_{\varepsilon_k} \overset{w^*}{\to} \mu \quad (k \to \infty)$, d.h. $\forall \varphi \in C_0$: $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)u_{\varepsilon_k}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)$.

Wir zeigen nun, dass obiges μ aufgefasst als Distribution gleich u ist, d.h. für alle $\psi \in \mathscr{S}$: $u(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\mathrm{d}\mu(x)$: Sei $\psi_\varepsilon = \psi * W(\cdot,\varepsilon)$. Für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt $(D^\alpha\psi_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha\psi)(x-t)W(t,\varepsilon)\mathrm{d}t$. Somit konvergiert nach der L^1-Theorie $D^\alpha\psi_\varepsilon$ gleichmässig gegen $D^\alpha\psi$ für $\varepsilon \to 0$.[1] Weiter konvergiert ψ_ε in $\mathscr{S}$ gegen ψ und daher $u(\psi_\varepsilon)$ gegen $u(\psi)$ für $\varepsilon \to 0$. Da $W(\cdot,\varepsilon) = \tilde{W}(\cdot,\varepsilon)$, gilt:

$$u(\psi_\varepsilon) = u(W(\cdot,\varepsilon) * \psi) = (u * W(\cdot,\varepsilon))(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u_\varepsilon(x)\mathrm{d}x$$

Nun folgt wie gewünscht, dass u das endliche Borelmass μ ist, da für alle $\psi \in \mathscr{S}$ gilt:

$$u(\psi) = \lim_{k\to\infty} u(\psi_{\varepsilon_k}) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u_{\varepsilon_k}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

□

Literatur

[Str] Struwe, Michael: *Funktionalanalysis I, Wintersemester 2002/03.* `http://www.math.ethz.ch/~struwe/Skripten/FA-I-WS2002.pdf`, Version vom 16.09.03.

[SW71] Stein, Elias M. und Guido Weiss: *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press, 1971.

[1]Vom Vortrag über die Fourier-Inversion wissen wir, dass für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $1 \leq p < \infty$ gilt: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|f * W(\cdot,\varepsilon)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$. Dies gilt auch für $f \in C_0(\mathbb{R}^n) \subset Ł^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $p = \infty$.