Singuläre Integrale 1

Grundideen der harmonischen Analysis

Jens Hinrichsen und Annina Saluz

November 2007

1 Motivation

Ein typisches Beispiel für ein singuläres Integral ist die Hilbert-Transformation, welche für eine Funktion f folgendermassen definiert ist

$$Tf(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

Dabei muss man das Integral durch einen geeigneten Grenzprozess interpretieren, da es offensichtlich nicht absolut konvergent ist. Ein Hindernis für die Konvergenz ist die Singularität des Integranden im Nullpunkt. Ausserdem wissen wir nicht ob die Funktion schnell genug abfällt. Das zweite Problem (welches wir bei der Betrachtung von Fourier-Reihen behandelt haben) vereinfachen wir hier, in dem wir $f \in L^p$ für ein $p > 1$ voraussetzen. Wir werden sehen, dass man das singuläre Integral dann unter gewissen zusätzlichen Bedingungen durch einen geeigneten Grenzprozess interpretieren kann. Für $f \in L^p$, $p > 1$ zerlegen wir das Integral folgendermassen:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-y)}{y} dy = \frac{1}{\pi} \int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy + \frac{1}{\pi} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy$$

Da wir im ersten Integral keine Singularitäten mehr haben, können wir mit Hölder die folgende Abschätzung machen:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|y|>\epsilon}\left|\frac{f(x-y)}{y}\right|dy \leq \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{|y|>\epsilon}|f(x-y)|^p dy\right)^{1/p}\cdot\underbrace{\left(\int\limits_{|y|>\epsilon}\frac{1}{|y|^q}dy\right)^{1/q}}_{=:C_y(\epsilon)<\infty}$$
$$\leq \frac{1}{\pi}\|f\|_p\cdot C_y(\epsilon)$$

Das zweite Integral kann man im Allgemeinen nicht abschätzen. Wir setzen deshalb voraus, dass f lokal Lipschitz-stetig ist und benutzen dann den Hauptwert P des Integrals über dem Intervall $[-\epsilon,\epsilon]$. Wir fixieren ein x mit f Lipschitz-stetig in x mit Konstante C. Es gilt:

$$\begin{aligned}
P\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{f(x-y)}{y}dy &:= \lim_{\delta\to 0^+}\int_{-\epsilon}^{-\delta}\frac{f(x-y)}{y}dy+\int_{\delta}^{\epsilon}\frac{f(x-y)}{y}dy\\
&= \lim_{\delta\to 0^+}\int_{\delta}^{\epsilon}\frac{f(x-y)-f(x+y)}{y}dy\\
&\leq \lim_{\delta\to 0^+}\int_{\delta}^{\epsilon}\frac{|f(x-y)-f(x+y)|}{|y|}dy\\
&\leq \lim_{\delta\to 0^+} C\cdot\int_{\delta}^{\epsilon}2dy\\
&= 2C\epsilon.
\end{aligned}$$

Insbesondere existiert also der Grenzwert für $\delta\to 0$.
Mit diesem Beispiel wollten wir zeigen, dass es intuitiv sinnvoll ist, einem singulären Integral einen Wert durch einen Grenzprozess zuzuordnen. M. Riesz hat bewiesen, dass die Hilbert Transformation ein beschränkter Operator auf L^p, $1<p<\infty$ ist und nicht beschränkt auf L^1, jedoch vom Typ $w-(1,1)$. Wir möchten nun allgemeine Ausdrücke der Form $\int K(x-y)\cdot f(y)dy$ betrachten und zeigen, dass diese unter geeigneten Bedingungen wohldefiniert sind.

2 Singuläre Integrale: Ein nützliches Theorem

Wir haben bereits einige Eigenschaften von translationsinvarianten Transformationen, die auf L^1 oder L^2 beschränkt sind, kennengelernt. Das Studium translationsinvarianter Operatoren, die auf einem L^p, $p\notin\{1,2\}$, beschränkt sind, ist im Allgemeinen schwieriger. Eine Ausnahme bildet die Klasse von

Faltungsoperatoren mit singulärem Kern, die ihre einzigen Singularitäten jeweils im Ursprung und im Unendlichen haben. Diese Klasse möchten wir im Folgenden betrachten.

Theorem:
Sei $K \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und es gelten die folgenden Annahmen:
(a) Die Fourier Transformierte von K sei fast überall beschränkt

$$|\hat{K}(x)| \leq B. \tag{1}$$

(b) K sei von der Klasse C^1 ausserhalb des Ursprungs und

$$|\nabla K(x)| \leq \frac{B}{|x|^{n+1}}. \tag{2}$$

Für $f \in L^1 \cap L^p$ setze

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y) dy. \tag{3}$$

Dann existiert eine Konstante A_p, so dass

$$\|T(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p, \ 1 < p < \infty. \tag{4}$$

Folglich kann man, da $L^1 \cap L^p$ dicht in L^p ist, mit Stetigkeit T auf ganz L^p fortsetzen. Die Konstante A_p ist nur abhängig von p, B und der Dimension n, also insbesondere unabhängig von der L^2 Norm von K.

Bemerkung 1: Die Annahme, dass $K \in L^2$, machen wir nur um eine direkte Definition von Tf auf einer dichten Teilmenge von L^p zu haben (hier auf $L^1 \cap L^p$). Es gilt nämlich: $f \in L^1$, $K \in L^2 \Rightarrow K * f = Tf \in L^2$, also müssen wir uns keine Gedanken über den Sinn des Integrals in (3) machen. Die Annahme könnte auch durch eine andere ersetzt werden, wie zum Beispiel $K \in L^1 + L^2$. Wir wählen hier $K \in L^2$, da wir dann das Theorem von Plancherel verwenden können. In den Anwendungen ist die Annahme $K \in L^2$ nicht von Bedeutung, da man durch einen geeigneten Grenzwertprozess darauf verzichten könnte (siehe Vortrag über Singuläre Integrale 2). Dies wiederum gilt, da die Schranke in (4) unabhängig von der L^2 Norm von K ist.

Bemerkung 2: Anstelle von (2) kann man auch die folgende Bedingung (2') verlangen

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq B', \ \textit{für alle } |y| > 0.$$

Der Beweis der Behauptung 2 wird dann etwas anders geführt. Wir werden unten auf die entsprechenden Stellen hinweisen.

Beweis des Theorems:
Wir führen den Beweis in drei Schritten.
Behauptung 1: T ist vom Typ $(2,2)$.
Beweis von Beh.1:
Wenn wir die Fourier Transformation verwenden, sehen wir, dass $(\hat{Tf})(y) = \hat{K}(y) \cdot \hat{f}(y)$, für $f \in L^1 \cap L^2$, somit gilt mit Annahme (a) und Plancherel:

$$\|T(f)\|_2 = \|\hat{T(f)}\|_2 = \|\hat{K}\hat{f}\|_2 \leq \|\hat{K}\|_{L^\infty}\|\hat{f}\|_2 \leq B\|\hat{f}\|_2 = B\|f\|_2 \tag{5}$$

Wegen (5) besitzt T eine eindeutige Erweiterung auf ganz L^2, wo (5) noch gilt. T ist also vom Typ (2,2).

□Beh.1

Bemerkung 3: Insbesondere ist T deshalb auch $w-(2,2)$, das heisst

$$m\{x; |Tf(x)| > \alpha\} \leq \frac{B^2}{\alpha^2}\|f\|_2^2, \ f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{6}$$

Behauptung 2: T ist $w-(1,1)$.
Beweis von Beh. 2: Die Idee ist f in $f = g + b$ zu zerlegen, wobei g der "gute Teil" von f ist, das heisst $f = g$ auf der Menge wo f klein ist und b ist der "schlechte Teil" mit Träger auf der Menge wo f eher gross ist. Wir werden sehen, dass der "gute Teil" g in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist.Damit können wir dann mit (6) eine passende Abschätzung für $T(g)$ finden.
Für die Abschätzung von $T(b)$ möchten wir die Annahme (2) aus dem Theorem verwenden. Um aus $T(b) = \int_{\Omega \subset \mathbb{R}^n} K(x-y) \cdot b(y)dy$ einen Ausdruck mit dem Gradienten zu erhalten, wäre es praktisch eine Zerlegung von Ω in Würfel Q zu finden, so dass $\int_Q b(y)dy = 0$, da wir dann einen Term $K(x-y^Q)$, wobei y^Q ein beliebiger Punkt in Q ist, einfügen könnten:

$$Tb(x) = \int_Q K(x-y) \cdot b(y)dy = \int_Q (K(x-y) - K(x-y^Q))b(y)dy$$

Den letzten Term könnten wir dann mit dem Gradienten abschätzen.
Wir führen nun die Details vom Beweis aus:

Zu zeigen ist, dass eine positive Konstante C existiert, so dass

$$m\{x; |(Tf)(x)| > \alpha\} \leq \frac{C}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx, \ f \in L^1(\mathbb{R}^n) \tag{7}$$

Bemerkung 4: Um die Notation zu vereinfachen, verwenden wir C im Folgenden als eine allgemeine Konstante (nicht notwendigerweise die gleiche an verschiedenen Stellen), die nur abhängig von der Konstanten B und der Dimension n ist.

Wir fixieren nun α. Nach einem Korollar aus dem 2. Vortrag können wir $\mathbb{R}^n$ folgendermassen zerlegen:
$\mathbb{R}^n = F \cup \Omega$, mit F abgeschlossen, $F \cap \Omega = \emptyset$; $|f(x)| \leq \alpha$, $x \in F$; $\Omega = \bigcup_j Q_j$ wobei die Inneren der Q_j disjunkt sind, und

$$m(\Omega) \leq \frac{C}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \tag{8}$$

und

$$\frac{1}{m(Q_j)} \int\limits_{Q_j} |f(x)| dx \leq C\alpha. \tag{9}$$

Weiter können wir voraussetzen (vgl. Beweis vom Korollar auf Seite 18 im Buch *Singular Integrals and differentiability properties of functions* von E.M. Stein), dass

$$diam(Q_j) \leq dist(Q_j, F) \leq 4 \cdot diam(Q_j). \tag{10}$$

Wir setzen also gemäss unserer Idee

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{, falls } x \in F \\ \frac{1}{m(Q_j)} \int\limits_{Q_j} f(x) dx & \text{, für } x \in Q_j^{\circ} \end{cases} \tag{11}$$

Dies definiert g fast überall. Wegen der ersten Gleichung ist $g = f$ auf der Menge wo f klein ist. Mit $f(x) = g(x) + b(x)$ folgt wie gewünscht:

$$b(x) = 0, \ x \in F \tag{12}$$

$$\int\limits_{Q_j} b(x) dx = 0 \text{ für alle Würfel } Q_j. \tag{13}$$

Da $Tf = Tg + Tb$ folgt dann, dass

$$m\{x; |Tf(x)| > \alpha\} \leq m\{x; |Tg(x)| > \frac{\alpha}{2}\} + m\{x; |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\}$$

und wir können die Terme auf der rechten Seite einzeln abschätzen.

Abschätzung für Tg:
Tg ist in $L^2(\mathbb{R}^n)$, da mit (11), (9) und (8) gilt:

$$\begin{aligned}
\|g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 dx &= \int_F |g(x)|^2 dx + \int_\Omega |g(x)|^2 dx \\
&\leq \int_F |f(x)|^2 dx + \sum_j \int_{Q_j} \left(\frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} |f(y)| dy \right)^2 dx \\
&\leq \int_F \alpha |f(x)| dx + C^2 \alpha^2 \sum_j m(Q_j) \\
&\leq \alpha \|f\|_1 + C^2 \alpha^2 m(\Omega) \\
&\leq (C^2 A + 1) \cdot \alpha \|f\|_1 \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Durch Anwendung der Ungleichung (6) des L^2-Falls folgt:

$$m\{x; |Tg(x)| > \frac{\alpha}{2}\} \leq \frac{B^2}{\alpha^2} \|g\|_2^2 \leq \frac{C}{\alpha} \cdot \|f\|_1. \tag{14}$$

Abschätzung für Tb:
Definiere:

$$b_j(x) := \begin{cases} b(x) & , x \in Q_j \\ 0 & , x \notin Q_j \end{cases}$$

Dann gilt $b(x) = \sum_j b_j(x)$ und $(Tb)(x) = \sum_j (Tb_j)(x)$ mit

$$Tb_j(x) = \int_{Q_j} K(x-y) b_j(y) dy.$$

Da $\int_{Q_j} b_j(y) dy = \int_{Q_j} b(y) dy = 0$ gilt:

$$Tb_j(x) = \int_{Q_j} (K(x-y) - K(x-y^j)) b_j(y) dy, \tag{15}$$

wobei y^j der Mittelpunkt des Würfels Q_j ist. Da nach Annahme $|\nabla K| \leq B \cdot |x|^{-(n+1)}$ folgt mit dem Mittelwertsatz:

$$|K(x-y) - K(x-y^j)| \leq C \cdot \frac{diam(Q_j)}{|x-\hat{y}^j|^{n+1}},$$

wobei $\hat{y}^j$ ein Punkt auf der Geraden, die y^j mit $y \in Q_j$ verbindet, ist (also insbesondere von y abhängig). Wir erhalten also

$$|Tb_j(x)| \leq C \cdot diam(Q_j) \int\limits_{Q_j} \frac{|b(y)|}{|x-\hat{y}^j|^{n+1}} dy. \tag{16}$$

Wir möchten nun die Eigenschaft (10) benutzen, um beliebige Distanzen $|x-y|$ für x in F und y in Q_j vergleichen zu können. Diese Eigenschaft ist sehr nützlich, da wir dann variable Distanzen $|x-y|$ in den Integralen durch konstante Distanzen $|x-y^j|$ (also für feste y^j), abschätzen können.Diese konstanten Faktoren können wir dann aus dem Integral nehmen. Dadurch können wir die Integrale einfacher abschätzen. Am Schluss können wir die konstanten Distanzen wieder durch die variablen Distanzen ersetzen.
Die gewünschte Abschätzung erhalten wir folgendermassen:
Mit (10) folgt für festes $x \in F$ und $y,\ z \in Q_j$ beliebig:

$$\begin{aligned} |x-y| &\geq dist(Q_j, F) \geq diam(Q_j) \geq |z-y| \\ &\geq |z-x| - |x-y|, \end{aligned}$$

also $|z-x| \leq 2 \cdot |x-y|$. Nach Vertauschung von y und z folgt:

$$|x-y| \leq 2|x-z| \leq 4|x-y|. \tag{17}$$

Wir erhalten insbesondere

$$|x-\hat{y}^j| \geq \frac{1}{2}|x-y^j|.$$

Mit (16) gilt also

$$|Tb_j(x)| \leq C \cdot diam(Q_j) \frac{1}{|x-y^j|^{n+1}} \int\limits_{Q_j} |b(y)| dy.$$

Dieses Integral lässt sich nun aber abschätzen.
Mit $f = g + b$ folgt $|b| \leq |f| + |g|$, und mit den Abschätzungen (8) und (9)

erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{Q_j} |b(y)|dy &\leq \int_{Q_j} |f(y)|dy + \int_{Q_j} |g(y)|dy \\ &\leq m(Q_j) \cdot C\alpha + \int_{Q_j} \frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} |f(x)|dxdy \\ &\leq 2C\alpha \cdot m(Q_j).\end{aligned}$$

Somit folgt

$$|Tb_j(x)| \leq C\alpha m(Q_j) \cdot diam(Q_j) \cdot \frac{1}{|x - y^j|^{n+1}}.$$

Wenn wir mit $\delta(y)$ die Distanz von y zu F bezeichnen, können wir die folgende Abschätzung machen

$$diam(Q_j) \leq dist(Q_j, F) = \min_{y \in Q_j} \delta(y) \leq \frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} \delta(y)dy.$$

Setzen wir dies in die obige Ungleichung ein, so erhalten wir für $x \in F$

$$|Tb_j(x)| \leq C\alpha m(Q_j) \cdot \frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} \frac{\delta(y)}{|x - y^j|^{n+1}} dy.$$

Wir können nun $|x - y^j|$ in der letzten Ungleichung mit (17) wieder durch ein Vielfaches einer variablen Distanz $|x - y|$ abschätzen und erhalten

$$|Tb_j(x)| \leq C\alpha \int_{Q_j} \frac{\delta(y)}{|x - y|^{n+1}} dy, \ x \in F.$$

Dies ist eine Majorisierung von T durch das Marcinkiewicz Integral. Um eine Abschätzung für dieses Intergral zu erhalten, verwenden wir folgendes Lemma:

Lemma 1: Sei F abgeschlossen mit $m(F^c) < \infty$ und sei $I_*(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta(x+y)}{|y|^{n+1}} dy$. Dann gilt $I_*(x) < \infty$ für fast alle $x \in F$ und weiter $\int_F I_*(x)dx \leq C \cdot m(F^c)$. Einen Beweis findet man zum Beispiel im Buch *Singular Integrals and differentiability properties of functions* von E.M. Stein auf Seite 15.

Mit dem Lemma und (8) folgt

$$\int_F |Tb(x)|dx \leq C\alpha \cdot m(\Omega) \leq C \cdot \|f\|_1. \tag{18}$$

Aus dieser Ungleichung erhalten wir mit Tschebychev

$$m\{x \in F; |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\} \leq \frac{2C}{\alpha} \cdot \|f\|_1. \tag{19}$$

Da $m(F^c) = m(\Omega) \leq \frac{C}{\alpha} \cdot \|f\|_1$ erhalten wir die gewünschte Abschätzung für Tb

$$m\{x; |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\} \leq m\{x \in F; |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\} + m(\Omega) \leq \frac{C}{\alpha} \cdot \|f\|_1.$$

Mit der analogen Abschätzung für Tg, (14), folgt also

$$m\{x; |Tf(x)| > \alpha\} \leq m\{x; |Tg(x)| > \frac{\alpha}{2}\} + m\{x; |Tb(x)| > \frac{\alpha}{2}\} \quad \leq \frac{C}{\alpha} \cdot \|f\|_1,$$

das heisst T ist $w-(1,1)$.

$\square$Beh.2

Bemerkung 5: Im alternativen Beweis mit der Annahme (2') anstelle von (2), schätzt man die Distanzen $|x-y^j|$ ab, ohne die Proportionalität der Durchmesser der Q_j und deren Distanzen zu F benutzen. Man betrachtet dazu Würfel Q_j^*, die den gleichen Mittelpunkt y^j haben, jedoch $2 \cdot n^{\frac{1}{2}}$ mal grösser sind. Eine Abschätzung für $|x-y^j|$ erhält man dann durch eine einfache geometrische Überlegung. Weiter kann man das Integral (15) abschätzen ohne den Umweg über das Marcinkiewicz Integral zu machen.

Letzter Schritt: Die L^p Ungleichungen
(a) Den Fall $p=2$ haben wir in (5) bewiesen.
(b) Den Fall $1 < p < 2$ zeigen wir mit der vereinfachten Version des Marcinkiewicz Interpolationssatzes (aus dem 3. Vortrag):

Interpolationstheorem: Sei $1 < r \leq \infty$. Falls T eine subadditive Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^n) + L^r(\mathbb{R}^n)$ in den Raum der messbaren Funktionen ist, die $w-(1,1)$ und $w-(r,r)$ ist, dann ist T auch vom Typ (p,p) für alle p mit $1 < p < r$.

Wir prüfen also die Bedingungen für $r = 2$: T ist wohldefiniert auf $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$, da $L^1 \cap L^2$ in L^1 und in L^2 dicht ist. T ist offensichtlich auch linear und subadditiv. Weiter gilt nach Beh. 2, dass T $w - (1,1)$ und nach Beh. 1, dass T $w - (2,2)$ ist, mit Schranken, die nur von B und n abhängig sind. Nach dem Interpolationstheorem gilt also

$$\|T(f)\|_p \leq A_p \cdot \|f\|_p, \ 1 < p < 2, \ f \in L^p,$$

wobei A_p nur von B, p und n abhängig ist.
(c) Für $2 < p < \infty$ möchten wir die Dualität zwischen L^p und L^q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ausnützen. Dabei können wir verwenden, dass das Theorem für L^q bewiesen ist. Wir benötigen noch das folgende Lemma:

Lemma 2: Sei ψ lokal integrierbar und $\sup\limits_{\phi \in C_c^o, \|\phi\|_q \leq 1} |\int \psi \phi dx| = A < \infty$. Dann ist $\psi \in L^p$ und $\|\psi\|_p = A$.
Dieses Lemma möchten wir hier nicht beweisen (siehe zum Beispiel Mass und Integral SS07, Serie 9).

Wir wählen nun $f \in L^1 \cap L^p$ und ϕ stetig mit kompaktem Träger und $\|\phi\|_q \leq 1$.
Behauptung: $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |K(x-y)| \cdot |f(y)| \cdot |\phi(x)| dx dy$ konvergiert absolut.
Beweis:
Nach Tonelli reicht es, die Existenz eines der iterierten Integrale zu zeigen. Da ϕ stetig mit kompaktem Träger ist, liegt ϕ in jedem L^p, also insbesondere in L^2. Betrachte

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^n} |K(x-y)| \cdot |f(y)| dy dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)| \cdot \underbrace{(|K| * |f|)(x)}_{\in L^2} dx \\
&\leq \|\phi\|_2 \cdot \||K| * |f|\|_2 \\
&\leq \|\phi\|_2 \cdot \|K\|_2 \cdot \|f\|_1 \\
&< \infty
\end{aligned}$$

□Beh.

Mit Fubini und $\tilde{K}(x) := K(-x)$ folgt für den zugehörigen Operator $\tilde{T}$

$$
\begin{aligned}
I &:= \int_{\mathbb{R}^n} T(f)(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)K(x-y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\tilde{K}(y-x)dx \right)}_{\tilde{T}(\phi)(x)} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \tilde{T}(\phi)(x)dy.
\end{aligned}
$$

Da das Theorem für $1 < q < 2$ gilt, ist $\tilde{T}(\phi) \in L^q$ mit $\|\tilde{T}(\phi)\|_q \leq A_q\|\phi\|_q \leq A_q$.
Mit Hölder erhalten wir

$$|I| \leq A_q\|f\|_p.$$

Wenn wir das Supremum auf beiden Seiten nehmen, liefert Lemma 2 die gesuchte Ungleichung für $2 < p < \infty$:

$$\|Tf\|_p = \sup_{\phi \in C_c^o, \|\phi\| \leq 1} |\int_{\mathbb{R}^n} (Tf)\phi dx| \leq A_q\|f\|_p$$

$\Box$Theorem

Im zweiten Vortrag über Singuläre Integrale werden wir sehen, dass sich das Theorem auch auf Kerne, die weniger starke Voraussetzungen erfüllen, erweitern lässt. Ein Beispiel bildet der Kern der zur Hilbert-Transformation gehört.