Seminar zur Darstellungstheorie von Köchern
HS08

Erste Definitionen und der Satz von Gabriel

Autoren:
Nicoletta Andri
Claude Eicher
Reto Hobi
Andreas Pasternak

Professorin:
Prof. K. Baur

Assistent:
I. Dell'Ambrogio

DMATH
Department of Mathematics

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

1 Grundlegende Definitionen und Beispiele

Im Rahmen dieses Seminars beschäftigen wir uns mit der Darstellungstheorie von Köchern. Im mathematischen Sinne ist ein Köcher nichts anderes als ein endlicher gerichteter, nicht notwendigerweise zusammenhängender Graph. Dabei können sowohl Schleifen wie auch Mehrfachpfeile vorkommen.

Im Folgenden betrachten wir alle Vektorräume über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k.

Eine Kategorie C ist gegeben durch zwei Daten. Einerseits der Klasse von Objekten $\mathrm{Ob}(C)$, hier die Menge der Darstellungen von Q, und der Menge $\mathrm{Mor}(C)$ der Morphismen, hier $\mathrm{Hom}_Q(X, Y)$. C ist zudem mit einer Komposition von Morphismen versehen, die folgende zwei Eigenschaften erfüllen muss.

1. (Assoziativität) Sind W, X, Y, Z Objekte aus $\mathrm{Ob}(C)$, so gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ für alle Morphismen $f : Y \to Z$, $g : X \to Y$ und $h : W \to X$.

2. (Identitätsmorphismen) Zu jedem Objekt Y gibt es einen Morphismus $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$ mit $\mathrm{id}_Y \circ g = g$ für alle Morphismen $g : X \to Y$ und alle Objekte $X \in \mathrm{Ob}(C)$, und $f \circ \mathrm{id}_Y = f$ für alle Morphismen $f : Y \to Z$ und alle Objekte $Z \in \mathrm{Ob}(C)$.

Einige Beispiele für Kategorien sind

- Die Kategorie der Gruppen: Objekte sind die Gruppen, Morphismen sind die Gruppen-Homomorphismen. (analog für Ringe und Körper)
- Die Kategorie der k-Vektorräume: Objekte sind die k-Vektorräume, Morphismen sind die linearen Transformationen.
- Die Kategorie der topologischen Räume: Objekte sind die topologischen Räume, Morphismen sind die stetigen Abbildungen.

Definition Ein Morphismus $f : X \to Y$ heisst *Isomorphismus*, wenn er ein beidseitiges Inverses $g : Y \to X$ besitzt, d.h.

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y \text{ und } g \circ f = \mathrm{id}_X \,.$$

Ein Isomorphismus mit $X = Y$ heisst *Automorphismus*.

Ein Spezialfall des Isomorphiebegriffes sind beispielsweise Homöomorphismen als Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen. Vorsicht: Der Begriff Isomorphismus ist nicht mit einem bijektiven Homomorphismus gleichzusetzen. So existieren zum Beispiel bijektive, stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, deren Inverse nicht mehr stetig sind.

Definition: Ein *Köcher* ist ein Quadrupel $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, wobei Q_0, Q_1 endliche Mengen (die Mengen der *Knoten* bzw. der *Pfeile*) bezeichnen und

$$s, t : Q_1 \to Q_0$$

sind Abbildungen, die jedem Pfeil in Q_1 die dazugehörige *Quelle* bzw. das dazugehörige *Ziel* zu.

Beschriften wir die Knoten mit $i, j, \ldots$ und die Pfeile mit $\alpha, \beta, \ldots$, dann könnte ein Köcher zum Beispiel folgendermassen aussehen.

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "\alpha"] & j \arrow[loop above, "\beta_1"] \arrow[loop below, "\beta_2"'] \end{tikzcd}$$

Definition: Eine *Darstellung* X eines Köchers Q besteht aus einer Familie von Vektorräumen $(V_i)_{i \in Q_0}$ und einer Familie von linearen Abbildungen $f_\alpha : V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)}$ mit $\alpha \in Q_1$.

Eine Darstellung für den obigen Graphen bestünde dann aus zwei Vektorräumen V und W und drei linearen Abbildungen f, g_1 und g_2.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[loop above, "g_1"] \arrow[loop below, "g_2"'] \end{tikzcd}$$

Jeder Knoten wird somit durch einen Vektorraum dargestellt und jeder Pfeil entspricht einer linearen Abbildung.
Um von einer Darstellung in eine andere zu wechseln, ist die folgende Definition nützlich.

Definition: Seien $X = ((V_i)_{i \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ und $Y = ((W_i)_{i \in Q_0}, (g_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ Darstellungen eines Köchers Q. Ein *Morphismus* $\phi : X \to Y$ ist eine Familie von linearen Abbildungen $(\phi_i : X_i \to Y_i)$, sodass das folgende Diagramm für alle $\alpha \in Q_1$ kommutiert.

$$\begin{tikzcd} V_{s(\alpha)} \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\phi_{s(\alpha)}"'] & V_{t(\alpha)} \arrow[d, "\phi_{t(\alpha)}"'] \\ W_{s(\alpha)} \arrow[r, "g_\alpha"] & W_{t(\alpha)} \end{tikzcd}$$

Seien $\phi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ zwei Morphismen. Die Familie der Kompositionen $(\psi_i \phi_i)_{i \in Q_0}$ ist wiederum ein Morphismus $\psi\phi : X \to Z$. Dies kann im folgenden Diagramm leicht eingesehen werden.

$$\begin{tikzcd}
V_{s(\alpha)} \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\phi_{s(\alpha)}"'] & V_{t(\alpha)} \arrow[d, "\phi_{t(\alpha)}"'] \\
W_{s(\alpha)} \arrow[r, "g_\alpha"] \arrow[d, "\psi_{s(\alpha)}"'] & W_{t(\alpha)} \arrow[d, "\psi_{t(\alpha)}"'] \\
T_{s(\alpha)} \arrow[r, "h_\alpha"] & T_{t(\alpha)}
\end{tikzcd}
\Rightarrow
\begin{tikzcd}
V_{s(\alpha)} \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\psi\phi_{s(\alpha)}"'] & V_{t(\alpha)} \arrow[d, "\psi\phi_{t(\alpha)}"'] \\
T_{s(\alpha)} \arrow[r, "h_\alpha"] & T_{t(\alpha)}
\end{tikzcd}$$

Die Menge der Morphismen $X \to Y$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}_Q(X, Y)$, die ein Unterraum von $\prod_{i \in Q_0} \mathrm{Hom}(V_i, W_i)$ ist, und wir schreiben $\mathrm{End}(X)$ für die Menge der Endomorphismen $X \to X$.

Definition: Die Darstellungen eines gegebenen Köchers Q zusammen mit den Morphismen bilden die Darstellungskategorie *Rep(Q,k)*. (Sie ist sogar eine abelsche Kategorie)

Die Komposition von Morphismen zwischen Darstellungen eines Köchers Q ist assoziativ, was man leicht mit folgendem Diagramm sieht.Zusätzlich existiert ein neutrales Element $\mathrm{id}_X : X \to X$ mit $\mathrm{id}_X = (\mathrm{id}_{V_i})_{i \in Q_0}$ für alle $i \in Q_0$.

$$\begin{tikzcd}
V_{s(\alpha)} \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "id_{s(\alpha)}"'] & V_{t(\alpha)} \arrow[d, "id_{t(\alpha)}"'] \\
V_{s(\alpha)} \arrow[r, "f_\alpha"] & V_{t(\alpha)}
\end{tikzcd}$$

Definition: Eine Darstellung $X = (V_i, f_\alpha)$ von Q heisst *endlich dimensional*, falls alle Vektorräume V_i endlich dimensional sind. Unter dieser Annahme ist die Familie

$$\underline{\dim} X := (\dim V_i)_{i \in Q_0}$$

definiert als der *Dimensionsvektor* von X. Dieser liegt in der additiven Gruppe $\mathbb{Z}^{Q_0}$, welche aus allen Tupeln $\underline{n} = (n_i)_{i \in Q_0}$ besteht. Mit $(\epsilon_i)_{i \in Q_0}$ bezeichnen wir die kanonische Basis von $\mathbb{Z}^{Q_0}$, so dass $\underline{n} = \sum_{i \in Q_0} n_i \epsilon_i$ gilt.

Bemerkung 1: Für eine exakte Folge von endlich dimensionalen Darstellungen eines Köchers Q

$$0 \xrightarrow{\phi_1} M' \xrightarrow{\phi_2} M \xrightarrow{\phi_3} M'' \xrightarrow{\phi_4} 0$$

gilt

$$\underline{\dim} M = \underline{\dim} M' + \underline{\dim} M''.$$

Dies kann folgendermassen eingesehen werden. Weil die Folge exakt ist, gilt nach Definition jeweils $\ker \phi_i = \text{Im } \phi_{i-1}$. Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen (aus Linearer Algebra I) gilt

$$\begin{aligned} \underline{\dim} M &= \underline{\dim}(\ker \phi_3) + \underline{\dim}(\text{Im } \phi_3) \\ &= \underline{\dim}(\text{Im } \phi_2) + \underline{\dim}(\underbrace{\ker \phi_4}_{=M''}) \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität von ϕ_1 gilt nun aber $\phi_1(0) = 0$, also ist $\ker \phi_2 = \text{Im } \phi_1 = \{0\}$ und hat folglich Dimension 0.
Aus $\underline{\dim} M' = \underbrace{\underline{\dim}(\ker \phi_2)}_{=0} + \underline{\dim}(\text{Im } \phi_2) = \underline{\dim}(\text{Im } \phi_2)$ folgt die Behauptung.

Bemerkung 2: Zwei isomorphe endlich dimensionale Darstellungen haben den selben Dimensionsvektor. (folgt direkt aus Bemerkung 1)

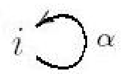
$$0 \to 0 \to M \to M' \to 0$$

Ein zentrales Problem der Köchertheorie ist die Beschreibung von Isomorphieklassen von endlich dimensionalen Darstellungen für bestimmte Köcher mit einem bestimmten Dimensionsvektor.

Definition: Ein Köcher Q ist *von endlichem Darstellungstyp*, wenn Q nur endlich viele Isomorphieklassen der Darstellungen für jeden gegebenen Dimensionsvektor hat.

Dies möchten wir nun an ein paar konkreten Beispielen veranschaulichen.

Beispiel 1: (Schleife)



Die Schleife ist ein Köcher L mit einem Knoten i und einem Pfeil α mit $s(\alpha) = t(\alpha) = i$. Eine Darstellung dieses Köchers ist folglich ein Paar (V, f) mit einem Vektorraum V und einem einem Endomorphismus f von V. Der Dimensionsvektor ist also gerade die Dimension von V. Ein Morphismus von (V, f) nach (W, g) ist eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$, so dass $\phi f = g\phi$.
Sei (V, f) eine gegebene Darstellung mit gegebener Dimension n. Wähle einen Isomorphismus $\phi : k^n \to V$. Dann können wir f mit einer $(n \times n)$-Matrix A identifizieren.

$$\begin{tikzcd} k^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\phi"'] & k^n \arrow[d, "\phi"'] \\ V \arrow[r, "f"] & V \end{tikzcd}$$

Jeder Isomorphismus $\psi : k^n \to V$ kann in ϕ und einen Automorphismus von k^n, einer invertierbaren $(n \times n)$-Matrix B zerlegt werden. Entsprechend kann f mit der Matrix BAB^{-1} identifiziert werden.

$$\begin{tikzcd}
k^n \arrow[r, "BAB^{-1}"] \arrow[d, "B"'] \arrow[dd, bend right=60, "\psi"'] & k^n \arrow[d, "B"'] \arrow[dd, bend left=60, "\psi"] \\
k^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\phi"'] & k^n \arrow[d, "\phi"'] \\
V \arrow[r, "f"] & V
\end{tikzcd}$$

Die Isomorphieklassen n-dimensionaler Darstellungen von L entsprechen also den Konjugationsklassen von $(n \times n)$-Matrizen. Diese können bekanntlich durch die Jordannormalform klassifiziert werden. Es gibt also unendlich viele Isomorphieklassen für die Darstellung von L mit einer gegebenen Dimension.

Beispiel 2: (r-Schleife)

L_2 :

Die r-Schleife mit $r \geq 1$ ist ein Köcher L_r mit einem Knoten i und r Schleifen $(\alpha_i)_{i=1,\dots,r}$ an diesem Knoten i. Eine Darstellung von L_r besteht also aus einem Vektorraum V und r Endomorphismen $(f_i)_{i=1,\dots,r}$. Die Isomorphieklassen der Darstellungen von L_r mit gegebener Dimension n entsprechen jeweils r-Tupeln von $(n \times n)$-Matrizen, eindeutig bis auf simultane Konjugation.

$$\begin{tikzcd}
k^n \arrow[r, shift left, "A"] \arrow[r, shift right, "B"'] \arrow[d, "\phi"'] & k^n \arrow[d, "\phi"'] \\
V \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & V
\end{tikzcd}$$

$$k^n \xrightarrow{C} k^n \xrightarrow{A,B} k^m \xrightarrow{C^{-1}} k^m$$

Beispiel 3: (r-Kronecker-Köcher)
Der r-Kronecker-Köcher K_r ist ein Köcher mit zwei Knoten i, j und r Pfeilen $(\alpha_i : i \to j)_{i=1,\dots,r}$. Darstellungen von K_r bestehen also aus zwei Vektorräumen V, W und r linearen Abbildungen $(f_i : V \to W)_{i=1,\dots,r}$. Der Dimensionsvektor ist das Paar der Dimensionen von V und W.

$$K_2: \qquad \begin{tikzcd} i \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\alpha_2"'] & j \end{tikzcd}$$

Wir suchen nun die Isomorphieklassen der Darstellungen von K_r mit gegebenem Dimensionsvektor (m, n). V hat also Dimension m und W hat Dimension n. Wir können wie im letzten Beispiel jede lineare Abbildung $f_i : V \to W$ mit einer $(n \times m)$-Matrix A_i identifizieren. Die Isomorphieklassen der Darstellungen mit Dimensionsvektor (m, n) entsprechen also r-Tupeln von $(n \times m)$-Matrizen, eindeutig bis auf simultane Multiplikation einer invertierbaren $(n \times n)$-Matrix N von links und einer invertierbaren $(m \times m)$-Matrix M von rechts.

$$k^n \xrightarrow{N} k^n \xrightarrow{A_i} k^m \xrightarrow{M} k^m$$

- $r = 1$
  Multipliziert man eine Matrix mit einem bestimmten Rang mit einer invertierbaren Matrix (also einer Matrix mit vollem Rang), so bleibt der Rang dieser Matrix bestehen. Ausserdem sind Matrizen mit demselben Rang zueinander konjugiert. Deshalb können die Darstellungen nach Rang klassifiziert werden. Für K_1 gibt es also nur endlich viele Isomorphieklassen von Darstellungen mit gegebenem Dimensionsvektor.

- $r \geq 2$
  Im Fall $r \geq 2$ ist die Klassifikation von L_{r-1} folgendermassen in derjenigen von K_r enthalten. Weil wir in L_{r-1} nur einen Knoten und entsprechen in der Darstellung nur einen Vektorraum mit gegebener Dimension n haben, betrachten wir nun eine Darstellung von K_r mit Dimensionsvektor (n, n) und zwar so, dass f_1 invertierbar ist.
  Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $f_1 = \mathrm{id}_{k^n}$ (sonst könnte man eine geeignete Basistransformation durchführen). Die anderen linearen Abbildungen $f_2, \ldots, f_r$ können dann mit $(n \times n)$-Matrizen identifiziert werden (eindeutig bis auf simultane Konjugation).
  Der Spezialfall der Darstellung von K_r mit Dimensionsvektor (n, n) hat also gemäss Beispiel 1 und 2 unendlich viele Isomorphieklassen.

Beispiel 4: (S_r)
Mit S_r bezeichnen wir den Köcher mit $r+1$ Knoten $i_1, \ldots, i_r, j$ und r Pfeilen $(\alpha_l : i_l \to j)_{l=1,\ldots,r}$.

$$S_4: \qquad \begin{tikzcd} & i_2 \arrow[d, "\alpha_2"] & \\ i_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & j & i_3 \arrow[l, "\alpha_3"] \\ & i_4 \arrow[u, "\alpha_4"] & \end{tikzcd}$$

Eine Darstellung M von S_r besteht also aus $r+1$ Vektorräumen $V_1, \ldots, V_r, W$ und r linearen Abbildungen $f_l : V_l \to W$.

Wir können nun M mit den Bildern von f_i identifizieren. Dann entsprechen die Isomorphieklassen der Darstellungen mit Dimensionsvektor $(m_1, \ldots, m_r, n)$ den r-Tupeln $(E_1, \ldots, E_r)$ von Unterräumen $E_i \subset k^n$ mit $\dim E_i \leq m_i$, $i = 1, \ldots, r$, eindeutig bis auf $g(E_1, \ldots, E_r) := (g(E_1), \ldots, g(E_r))$ mit $g \in \mathrm{GL}(n)$. Die Klassifikation der Darstellungen von S_r ist also äquivalent zur Klassifikation von r-Tupeln von Unterräumen eines gegebenen Vektorraumes.

- $r = 1$
  Es gilt $S_1 = K_1$. Diesen Fall haben wir also bereits in Beispiel 3 abgedeckt.

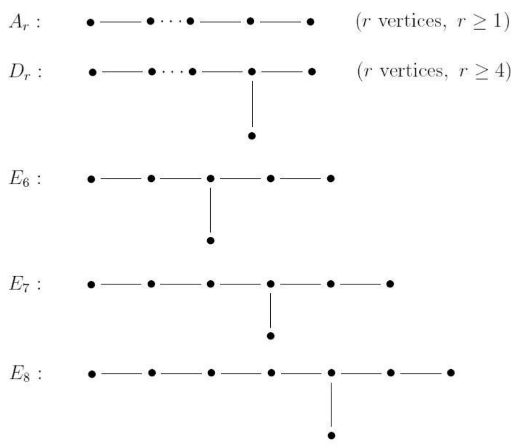
- $r = 2$
  Für $r = 2$ müssen wir die Paare (E_1, E_2) von Unterräumen $E_i \subset k^n$ klassifizieren. Diese Klassifikation geschieht aufgrund des Tripels $(\dim E_1, \dim E_2, \dim(E_1 \cap E_2)) =: (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ $(0 \leq c \leq \min(a, b))$. Es gibt in diesem Fall also insbesondere nur endlich viele Isomorphieklassen von Darstellungen mit bestimmtem Dimensionsvektor.

Man kann zeigen, dass auch für $r = 3$ nur endlich viele Isomorphieklassen von Darstellungen mit gegebenen Dimensionsvektor existieren. Für $r \geq 4$ gilt dies nicht mehr.

Der Satz von Gabriel gibt eine vollständige Beschreibung der Köcher von endlichem Darstellungstyp, also von Darstellungen mit endlich vielen Isomorphieklassen.

Satz: (Gabriel)
Ein Köcher ist genau dann von endlichem Darstellungstyp wenn jede Zusammenhangskomponente des zugrundeliegenden ungerichteten Graphen ein einfach-geschnürtes Dynkin-Diagramm ist.

Die simply-laced Dynkin-Diagramme sind die folgenden.



Beispiel: $K_1 = S_1$ hat Typ A_2, S_2 hat Typ A_3, S_3 hat Typ D_4.

Literatur

[1] Brion, M.: *Representations of quivers*

[2] Krause, H.: *Representations of quivers via reflection functors*

[3] Merkblatt über Kategorien