Seminar über Darstellungstheorie von Köchern

Dualität, $S(i)$, $P(i)$ und $I(i)$

Autoren:
Mattia Bergomi
Fabio Landoni
Cinzia Pedrazzoli
Laura Ortelli

Professorin: Karin Baur
Assistent: Ivo Dell'Ambrogio

14. Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Sei Q ein fest gelegter Köcher. Dann sind $S(i), P(i), I(i)$ mit $i \in Q_0$ spezielle Familien von Darstellungen. Wenn Q "schön" ist, dann kann man diese spezielle Darstellungen benutzen, um alle andere Darstellungen von Q zu konstruieren. Wir werden in diesen zwei Stunden diese Familien einführen und ihre Eigenschaften erklären.

Wegen der Äquivalenz zwischen der Kategorie der Darstellungen und der Kategorie der links-kQ-Module, die wir gesehen haben, gibt es auch eine Äquivalenz zwischen $S(i), P(i)$ bzw. $I(i)$ und einfachen, projektiven bzw. injektiven Module, woraus die Namen der Darstellungen kommen.

Für die Notationen und Nummerierung der Lemmas haben wir grösstenteils diejenige vom Skript von Krause [2] benutzt.

2 Erinnerungen

2.1 Funktoren

Seien C, D Kategorien. Sind X, Y Objekte von C, so schreiben wir $C(X, Y)$ für die Morphismen zwischen X und Y.

- Ein *Funktor* $F : C \to D$ ist eine Zuordnung

$$\begin{aligned} F : C &\longrightarrow D \\ Ob : X &\longmapsto F(X) \\ Mor : (f : X \to Y) &\longmapsto (F(f) : F(X) \to F(Y)) \end{aligned}$$

  so dass gilt:

  1. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, für $f \in C(Y, Z), g \in C(X, Y)$,
  2. $\forall X \in Ob(C)$ ist: $F(id_X) = id_{F(X)}$.

- Einen Funktor $F : C \to D$, mit der Zuordnung

$$\begin{aligned} F : C &\longrightarrow D \\ Ob : X &\longmapsto F(X) \\ Mor : (f : X \to Y) &\longmapsto (F(f) : F(Y) \to F(X)) \end{aligned}$$

  so dass gilt:

  1. $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$, für $f \in C(Y, Z), g \in C(X, Y)$,
  2. $\forall X \in Ob(C)$ ist $F(id_X) = id_{F(X)}$

  nennt man ein *kontravarianten Funktor* von C nach D.

Bemerkung: Wenn man die entgegengesetzte Kategorie C^{op} betrachtet (d.h. die Kategorie, die man aus C erhält, indem man die Morphismen $C^{op}(X, Y) := C(Y, X)$ setzt, also wenn man die Richtung der Morphismen umkehrt), so kann man den kontravarianten Funktor oben als einen Funktor $F : C^{op} \to D$ sehen.

2.2 Dualität zwischen endlichen Vektorräume

Wie es aus der Lineare Algebra bekannt ist, ist der *Dualraum* eines endlich dimensionalen Vektorraums V über einem Körper k definiert als

$$V^* := \{g : V \to k \text{ linear}\},$$

sowie das *Duale einer linearen Abbildung* $f : V \to W$ als

$$\begin{aligned} f^* : W^* &\longrightarrow V^* \\ \lambda &\longmapsto \lambda \circ f \end{aligned}$$

Das Ganze ist in Figur 1 als Diagramm dargestellt.

$$(\cdot)^* : Vec(k) \to Vec(k)$$

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] \arrow[dl, dashed, "\lambda\circ f"'] \arrow[dr, phantom, "\longmapsto"] & V^* \\
\mathrm{k} & W \arrow[l, "\lambda"] \arrow[r, mapsto] & W^* \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung 1: Diagramm der Dualität zwischen Vektorräumen

Beispiel 1. *$(\cdot)^*$ ist eine Kategorienäquivalenz $Vec(k) \xrightarrow{\cong} Vec(k)$ mit Selbst-Pseudo-Inversem $(\cdot)^*$, denn $\exists$ natürlicher Isomorphismus $\varepsilon : id_{Vec(k)} \xrightarrow{\cong} ((\cdot)^*)^*$. Die Existenz eines solchen ε folgt sofort aus der Existenz (siehe LinalgII) des kanonischen Isomorphismus*

$$\begin{aligned} \varepsilon_V : V &\xrightarrow{\cong} V^{**} \\ v &\longmapsto \begin{pmatrix} ev_v : V^* \to k \\ \qquad \lambda \mapsto \lambda(v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

zwischen jedem Vektorraum $V \in Ob(Vec(k))$ und sich selbst, wobei ev_v die Auswertungsabbildung ist.

Lemma 1.5.1 (VR Version) Seien V, W zwei Vektorräume. Dann existiert ein Isomorphismus

$$\varphi_{\text{VR}} : Hom(W, V^*) \xrightarrow{\cong} Hom(V, W^*)$$

Beweis. Z.z. ist die Existenz eines solchen φ_{VR}.
Nach der Existenz von ε_V (siehe Beispiel 1) kann man leicht überprüfen (analog wie im Beweis von Lemma 1.5.1 (Darst. Version) unten), dass

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{VR}} : \ Hom(W, V^*) &\longrightarrow Hom(V, W^*) \\ (\phi : W \to V^*) &\longmapsto \phi^* \circ \varepsilon_V \end{aligned}$$

es tut. $\square$

3 Dualität zwischen Darstellungen

Ziel dieses Kapitels ist, die obige Konstruktionen (für Vektorräume) auf Darstellungen zu verallgemeinern.

Definition 1. *Für ein Köcher Q definiert man den zugehörigen* entgegengesetzten Köcher Q^{op}*, indem man einfach nur die Richtung der Pfeilen von Q invertiert.*

Ein Beispiel sieht man in Figur 2.

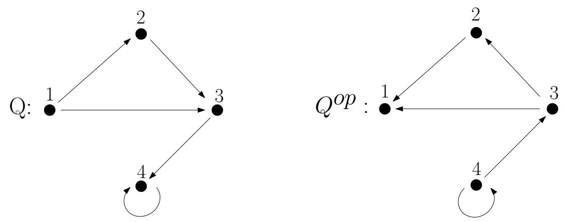

Abbildung 2: Beispiel eines entgegengesetzten Köcher

Definition 2. *Gegeben seien ein Köcher $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ und ein endlicher Körper k. Für eine Darstellung $X = (X_i, X_\alpha)$ von Q definiert man die* duale Darstellung DX *mittels dem kontravarianten Funktor*

Die Notation $X = (X_i, X_\alpha)$ entspricht einfach der "alten" Notation $X = (V_i, f_\alpha)$

$$D : Rep(Q, k) \longrightarrow Rep(Q^{op}, k)$$

als:

$$(DX)_i := (X_i)^*, i \in Q_0$$
$$(DX)_\alpha := (X_\alpha)^*, \alpha \in Q_1$$

(d.h. punktweise dualisieren), und analog für einen Morphismus $\phi : X \to Y$ zwischen zwei Darstellungen X, Y definiert man den dualen Morphismus

$$D(\phi)_i := (\phi_i)^*, i \in Q_0.$$

Das Ganze ist in Figur 3 als Diagramm dargestellt.

$$D : Rep(Q, k) \to Rep(Q^{op}, k)$$

$$\begin{tikzcd}
\{X_i, X_\alpha\} =: X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\longmapsto"] & D(X) := \{X_i^*, X_\alpha^*\} \\
Y \arrow[r, mapsto] & D(Y) \arrow[u, "D(\phi)"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3: Diagramm der Dualität zwischen Darstellungen

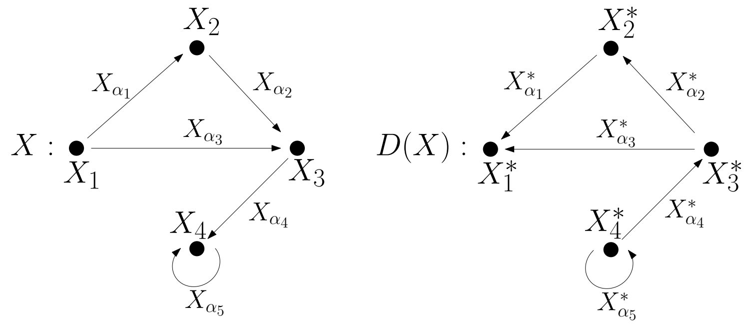

Abbildung 4: Beispiel einer dualen Darstellung

Bemerkung: Diese Definition für Darstellungen stimmt mit der Definition für Vektorräume überein, indem man den Köcher Q betrachtet, der nur aus einem Knoten besteht.

Beispiel 2. *Ein Beispiel einer dualen Darstellung ist in Figur 4 gegeben.*

Lemma 1.5.1 (Darst. Version) Seien $X \in Rep(Q,k)$, $Y \in Rep(Q^{op},k)$.
Dann gibt es ein kanonischen Isomorphismus

$$\varepsilon_X : X \to D^2X,$$

$$(\text{definiert durch } \varepsilon_i : X_i \to X_i^{**}, \forall i \in Q_0)$$

der einen (natürlichen) Isomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{Dar}} : \ Hom(Y, DX) &\xrightarrow{\cong} Hom(X, DY) \\ \phi &\longmapsto (D\phi) \circ \varepsilon_X \end{aligned}$$

induziert.

Beweis. Z.z.: φ_{Dar} ist ein Isomorphismus.
Wir behaupten, dass das gesuchte beidseitige Inverse von φ_{Dar} folgendes ist:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{Dar}} : \ Hom(X, DY) &\longrightarrow Hom(Y, DX) \\ \psi &\longmapsto (D\psi) \circ \varepsilon_Y \end{aligned}$$

In der Tat, wie man im Diagramm in Figur 5 sehen kann, gilt:

$$\varphi_{\text{Dar}} \circ \tau_{\text{Dar}} = id_{Hom(X,DY)}$$
$$\tau_{\text{Dar}} \circ \varphi_{\text{Dar}} = id_{Hom(Y,DX)}$$

□

$$\begin{tikzcd} (\phi : Y \to DX) \arrow[r, squiggly] & DY & D^2X \arrow[l, "D\phi"'] \\ & & X \arrow[u, "\varepsilon_X"'] \arrow[ul, "D\phi\circ\varepsilon_X"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} DX & D^2Y \arrow[l, "D\psi"'] & \\ & Y \arrow[u, "\varepsilon_Y"'] \arrow[ul, "D\psi\circ\varepsilon_Y"] & (\psi : X \to DY) \arrow[l, squiggly] \end{tikzcd}$$

Abbildung 5: Beweis von Lemma 1.5.1 (Darst. Version)

4 Einfache Darstellung: $S(i)$

Definition 3. *Gegeben seien zwei Darstellungen X, Y von Q.*
Man nennt X eine Unterdarstellung von *Y ($X \subseteq Y$), falls folgendes gilt:*

1. *$\forall i \in Q_0$: X_i ist ein Unterraum von Y_i*
2. *$\forall \alpha \in Q_1, x \in X_{s(\alpha)} : X_\alpha(x) = Y_\alpha(x)$*

Beispiel 3. *Ein Beispiel einer Unterdarstellung ist in Figur 6 gegeben.*

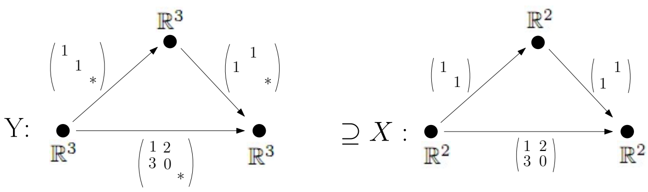

Abbildung 6: Beispiel einer Unterdarstellung

Definition 4. *Man sagt, dass eine Darstellung X* einfach *ist, falls sie nicht-trivial ist und keine echten nicht-trivialen Unterdarstellungen $\neq X$ besitzt.*

4.1 Die Darstellung $S(i)$

Sei $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ gegeben, und fixiere einen Knoten $i \in Q_0$.
Man definiert die Darstellung $S(i)$ als:

$$\begin{aligned} S(i)_j &= \begin{cases} k, & \text{falls } j = i \\ 0, & \text{falls } j \neq i \end{cases} && \text{für } j \in Q_0 \\ S(i)_\alpha &= 0 && \text{für } \alpha \in Q_1 \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist offensichtlich einfach, da weder k noch 0 nicht-triviale Unterräume besitzen. Das Duale $D(S(i))$ ist dann:

$$S(i)_j^* = \begin{cases} k^* & = & \{Lin.\ k \to k\}, & \text{falls } j = i \\ 0^* & = & \{0 \mapsto 0\}, & \text{falls } j \neq i \end{cases}$$
$$S(i)_\alpha^* = 0^* : \lambda \longmapsto \lambda \circ 0 = 0$$

Beispiel 4. *Ein Beispiel der Darstellung $S(i)$ und ihrem Dualen ist in Figur 7 gegeben.*

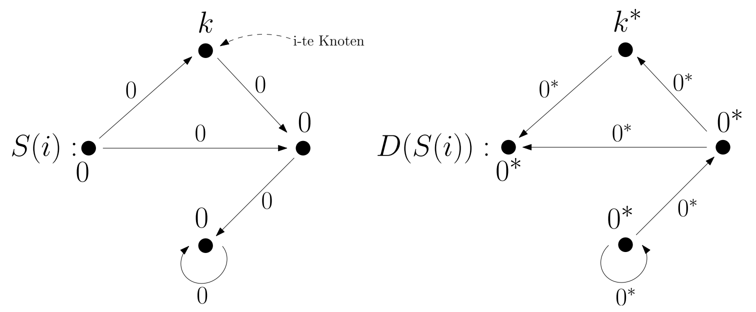

Abbildung 7: Beispiel von $S(i)$ und $D(S(i))$

Proposition 1.6.1 Sei $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ ein Köcher, der keine orientierte Zyklen enthält, und sei S eine beliebige einfache Darstellung von Q. Dann existiert immer genau einen Knoten $i \in Q_0$ so, dass $S \cong S(i)$.

Beweis. Wegen der Äquivalenz zwischen die Kategorien der Darstellungen und die Kategorien der kQ-Modulen, wird diese Beweis am einfachsten für kQ-Modulen durchgeführt. Für den ausführlichen Beweis verweisen wir auf Prop. 1.3.1 im Skript von Brion [1]. □

5 Projektive $P(i)$ und injektive $I(i)$ Darstellungen

5.1 Vorbereitung-Notationen

Definition 5.

- *Gegeben sei eine Menge M.*
  Dann schreibt man $k[M]$ für den Vektorraum mit Basis M, d.h.

$$k[M] := \left\{ \sum_p \lambda_p x_p : x_p \in M,\ \lambda_p \in k \text{ und fast alle } \lambda_p = 0 \right\}$$

- *Sei $\phi : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen.*
  Mit $k[\phi]$ ist die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} k[\phi] :\ & k[M] \longrightarrow k[N] \\ & \sum_p \lambda_p x_p \longmapsto \sum_p \lambda_p \phi(x_p) \end{aligned}$$

gemeint.

Definition 6. *Sei $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ ein beliebiger Köcher und seien $i, j \in Q_0$. Dann definieren wir:*

- *$Q(i, j) :=$ die Menge aller Wege ξ, die in i starten und in j enden, d.h.*

$$Q(i, j) := \{\xi : s(\xi) = i, t(\xi) = j\}$$

- *Durch die schon gesehene Komposition von Wegen, können wir auch folgende Konstruktion betrachten:*

$$\begin{aligned} Q(i, \xi) : \ Q(i, s(\xi)) &\longrightarrow Q(i, t(\xi)) \\ \mu &\longmapsto \xi \circ \mu \end{aligned}$$

  bzw.

$$\begin{aligned} Q(\xi, j) : \ Q(t(\xi), j) &\longrightarrow Q(s(\xi), j) \\ \nu &\longmapsto \nu \circ \xi \end{aligned}$$

5.2 Die Darstellung $P(i)$

Definition 7. *Sei $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$. Für ein* fixiertes $i \in Q_0$ *definieren wir die* projektive Darstellung $P(i)$ *wie folgt:*

$$\begin{aligned} P(i)_j &:= k[Q(i, j)] \,, \quad \textit{für } j \in Q_0 \\ P(i)_\alpha &:= k[Q(i, \alpha)] \,, \quad \textit{für } \alpha \in Q_1 \end{aligned}$$

(Beispiel später...)

5.3 Die Darstellung $I(i)$

Definition 8. *Durch Verwendung der Dualität an $P(i)$ definieren wir die* injektive Darstellung $I(i)$ *wie folgt (wieder $i \in Q_0$ fixiert):*

$$\begin{aligned} I(i)_j &:= k[Q(j, i)]^* \,, \quad \textit{für } j \in Q_0 \\ I(i)_\alpha &:= k[Q(\alpha, i)]^* \,, \quad \textit{für } \alpha \in Q_1 \end{aligned}$$

Bemerkung: Man sieht sofort, dass gilt:

$$I(i) = D\bar{P}(i),$$

wobei $\bar{P}(i)$ eine projektive Darstellung von Q^{op} ist, denn

$$D\bar{P}(i)_j = k[Q^{\text{op}}(i, j)]^* = k[Q(j, i)]^* = I(i)_j.$$

Beispiel 5. *Ein Beispiel der Darstellungen $P(i)$ und $I(i)$ ist in Figur 8 gegeben.*

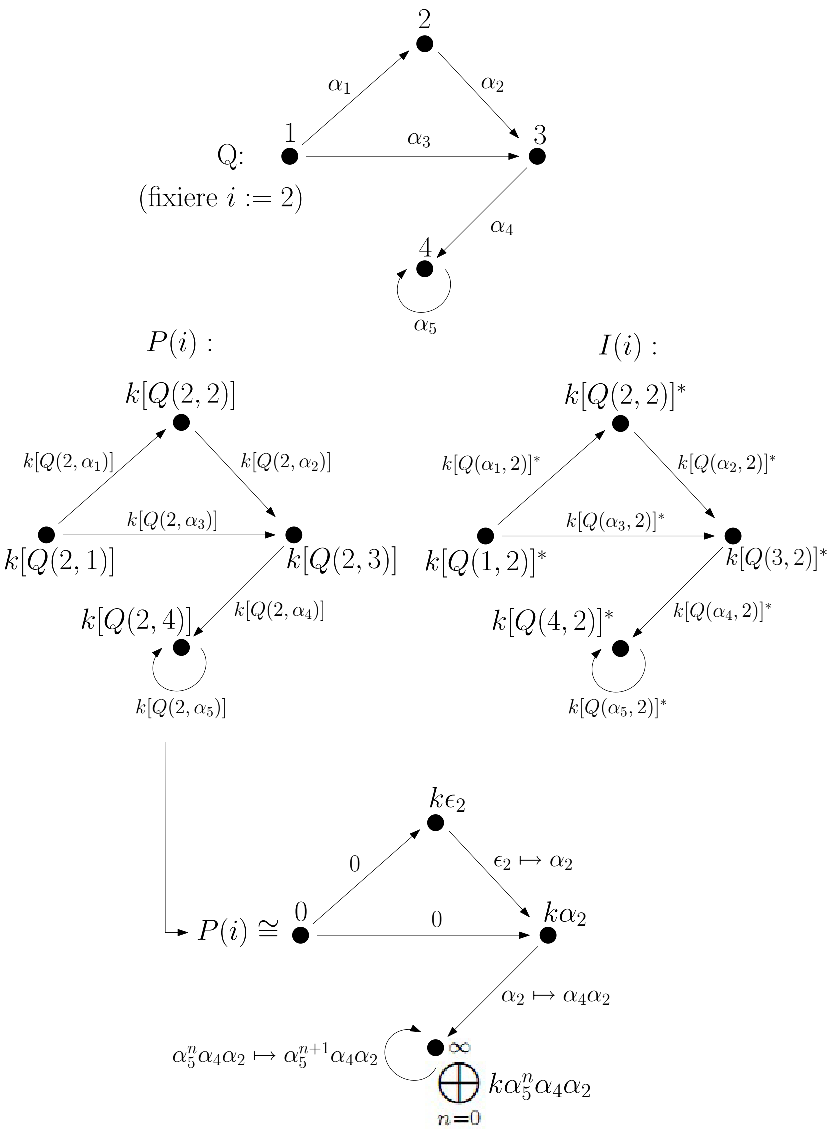

Abbildung 8: Beispiel von $P(i)$ und $I(i)$

5.4 Wichtige Eigenschaften von $P(i)$ und $I(i)$

Lemma 1.7.1 Sei X eine Darstellung von Q.
Dann gibt es zwei natürlichen Isomorphismen

(i) $Hom(P(i), X) \cong X_i$

(ii) $Hom(X, I(i)) \cong (X_i)^*$

Beweis. (i) Betrachte den Isomorphismus

$$\begin{aligned} Hom(P(i), X) &\xrightarrow{\cong} X_i \\ (\phi : P(i) \to X) &\longmapsto \phi_i(e_i) \end{aligned}$$

und sein Inverses

$$x \in X_i \mapsto \begin{pmatrix} P(i)_j \to X_j \\ \qquad \xi \mapsto X_{\xi_r} \circ \ldots \circ X_{\xi_1}(x) \end{pmatrix}$$

für ein Basiselement $\xi = \xi_r \circ \ldots \circ \xi_1$ von $P(i)_j$.

(ii) Es gilt:

$$\begin{aligned} Hom(X, I(i)) = Hom(X, D\bar{P}(i)) &\overset{\text{Lemma 1.5.1}}{\cong} \\ \cong Hom(\bar{P}(i), DX) &\overset{\text{(i)}}{\cong} X_i^*. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.7.2

(i) Die Darstellungen $P(i),\ i \in Q_0$ sind paarweise nicht isomorph.

(ii) Die Darstellungen $I(i),\ i \in Q_0$ sind paarweise nicht isomorph.

Beweis. Wir fixieren zwei Knoten $i, j \in Q_0$ und nehmen widerspruchsweise an, dass $P(j) \cong P(i)$ (bzw. $I(j) \cong I(i)$). Dann:

(i)

$$\begin{aligned} k = S(i)_i \overset{\text{Lemma1.7.1 (i)}}{\cong} Hom(P(i), S(i)) \overset{P(j) \cong P(i)}{\cong} Hom(P(j), S(i)) \overset{\text{Lemma1.7.1 (i)}}{\cong} \\ \cong S(i)_j = \begin{cases} k, & \text{falls } j = i \\ 0, & \text{falls } j \neq i \end{cases}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $j = i$ sein muss.

(ii) Analog:

$$\begin{aligned} k^* = S(i)_i^* \overset{\text{Lemma1.7.1 (ii)}}{\cong} Hom(S(i), I(i)) \overset{I(j) \cong I(i)}{\cong} Hom(S(i), I(i)) \overset{\text{Lemma1.7.1 (ii)}}{\cong} \\ \cong S(i)_j^* = \begin{cases} k^*, & \text{falls } j = i \\ 0^*, & \text{falls } j \neq i \end{cases}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $j = i$ sein muss.

□

Lemma 1.7.3 Sei Q ein Köcher, der keinen orientierten Zykel enthält.
Dann sind $P(i)$ und $I(i)$ endlich-dimensional mit

$$End(P(i)) \cong k \cong End(I(i)).$$

Beweis. Da Q keinen orientierten Zykel enthält, ist $Q(i,j)$ endlich, $\forall i,j$ (da Q endlich ist). Daraus folgt sofort aus der Definition von $P(i)_j$ (bzw. $I(i)_j$), dass sie endlich-dimensionale Vektorräume sind.
Für den zweiten Teil des Lemmas, es gilt:

$$End(P(i)) = Hom(P(i), P(i)) \overset{\text{Lemma1.7.1 (i)}}{\cong} P(i)_i = k[Q(i,i)] = k$$

bzw.

$$\begin{aligned} End(I(i)) = Hom(I(i), I(i)) &\overset{\text{Lemma1.7.1 (ii)}}{\cong} I(i)_i^* \\ &= (k[Q(i,i)])^{**} \cong k[Q(i,i)] = k \end{aligned}$$

□

6 Bibliographie

Literatur

[1] Brion Michel, *Representations of Quivers*, Lecture Notes 2008 *(http://www.math.ethz.ch/∼baur/Teaching/Brion_quivers.pdf).*

[2] Krause Henning, *Representations of Quivers via Reflection Functors*, Lecture Notes 2008 *(http://www.math.ethz.ch/∼baur/Teaching/Krause08.pdf).*

[3] Bill Crawley-Boevey, *Representations of Quivers*, Lecture Notes *(http://www.maths.leeds.ac.uk/∼pmtwc/quivlecs.pdf).*

[4] Merkblatt über Kategorien.