SEMINAR
DARSTELLUNGSTHEORIE VON KÖCHERN

SPIEGELUNGSFUNKTOREN TEIL 2

04.11.2008

CHRISTIAN LIEB
BENAJA SCHELLENBERG
FELIX STOCKER
MANUELA TSCHABOLD

Definition (Euler Form). *Sei $n = |Q_0|$. Die Eulerform ist die Bilinearform $\langle -, - \rangle : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch*

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} y_{t(\alpha)}.$$

Definiert man $(x, y) := \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle$, so erhält man eine symmetrische Bilinearfrom auf $\mathbb{Z}^n$.

Definition (Spiegelung). *Die Spiegelung bezüglich eines Knoten $i \in Q_0$ ist die Abbildung $\sigma_i : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ definiert durch*

$$\sigma_i := x - \frac{2(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i,$$

wobei e_i der i-te Basisvektor von $\mathbb{Z}^n$ ist.

Lemma 1. *S_i^+ und S_i^- sind Funktoren, das heisst $S_i^{\pm} id_X = id_{S_i^{\pm} X}$ für alle Darstellungen X und $S_i^{\pm}(\psi\phi) = (S_i^{\pm}\psi)(S_i^{\pm}\phi)$ für je zwei Morphismen $\phi : X \longrightarrow Y$ und $\psi : Y \longrightarrow Z$.*

Lemma 2. *Seien X,X' zwei Darstellungen von Q und i eine Senke (bzw. Quelle). Dann gilt:*

i. $S_i^{\pm}(X \oplus X') = S_i^{\pm} X \oplus S_i^{\pm} X'$
ii. $X = (S_i^- S_i^+ X) \oplus \operatorname{Cokern} \iota_i X$ *and* $X = (S_i^+ S_i^- X) \oplus \operatorname{Kern} \pi_i X$
iii. *If* $\operatorname{Cokern} \iota_i X = 0$ *then* $\dim S_i^+ X = \sigma_i(\dim X)$
iv. *If* $\operatorname{Kern} \pi_i X = 0$ *then* $\dim S_i^- X = \sigma_i(\dim X)$

Lemma 3. *Sei i eine Senke und X eine uzerlegbare Darstellung von Q.*
Dann sind äquivalent:

i. $X \ncong S(i)$
ii. $S_i^+ X$ *ist unzerlegbar*
iii. $S_i^+ X \neq 0$
iv. $S_i^- S_i^+ X \cong X$
v. *Die Abbildung* $(X_\alpha) : \bigoplus_{\alpha \in Q_1, t(\alpha) = i} X_{s(\alpha)} \longrightarrow X_i$ *ist ein Epimorphismus*
vi. $\sigma_i(\dim X) > 0$
vii. $\dim S_i^+ X = \sigma_i(\dim X)$

Bemerkung. *Lemma 3 gilt analog für Quellen von Q und den zugehörigen Funktor S_i^-.*

Satz. *Die Funktoren S_i^+ und S_i^- induzieren inverse Bijektionen zwischen den unzerlegbaren Darstellungen von Q und den unzerlegbaren Darstellungen von $\sigma_i Q$[1], mit Ausnahme der einfachen Darstellung $S(i)$, die durch diese Funktoren vernichtet wird.*
Zudem gilt $\dim S_i^{\pm} X = \sigma_i(\dim X)$ für alle unzerlegbaren Darstellungen X, die nicht isomorph zu $S(i)$ sind.

Quelle: H. Krause, *Representations of Quivers via Reflection Functors*, 2007.

[1] $\sigma_i Q$ ist der Köcher, den man aus Q durch Umkehrung der Pfeile im Knoten i erhält.