Darstellungstheorie von Köchern

Bernhard König, Marina Hälg, Elena Widmer, Karin Peter

11. November 2008

1 Zulässige Ordnung

Definition 0: Eine Ordnung $i_1, ..., i_n$ der Knoten von Q heisst *zulässig*, wenn für alle p der Knoten i_p eine Senke für $\sigma_{i_{p-1}}...\sigma_{i_1}Q$ ist. In diesem Fall haben wir:

$$\sigma_{i_n}...\sigma_{i_1}Q = Q.$$

Lemma 0: Eine zulässige Ordnung der Knoten in Q existiert genau dann, wenn Q keinen orientierten Zykel enthält.

2 Coxeter Funktoren

Definition 1: **Coxeter Funktoren.** Sei Q ein Köcher ohne orientierte Zykel und i_1,...,i_n eine zulässige Ordnung der Knoten von Q.
Der *Coxeter Funktor* zu dieser Ordnung ist definiert als:

$$C^+ = S^+_{i_n}...S^+_{i_1}\colon \mathrm{Rep}(Q,\, k) \longrightarrow \mathrm{Rep}(Q,\, k) \tag{1}$$

Und:

$$C^- = S^-_{i_1}...S^-_{i_n}\colon \mathrm{Rep}(Q,\, k) \;\longrightarrow \mathrm{Rep}(Q,\, k) \tag{2}$$

Für $r \in \mathbb{Z}$ definieren wir:

$$C^r = \begin{cases} (C^+)^r & \text{für} \quad r > 0 \\ \mathrm{Id} & \text{für} \quad r = 0 \\ (C^-)^{-r} & \text{für} \quad r < 0 \end{cases}$$

Lemma 1: Die Funktoren C^+ und C^- sind nicht abhängig von der Ordnung der Knoten von Q (solange die Ordnung zulässig ist).

Im Folgenden sei $Q_0 = \{1,...,n\}$ mit 1,...,n eine zulässige Ordnung.

Lemma 2: Sei i ein Knoten von Q_0. Dann gilt:

1. $\dim P(i) = \sigma_1 ... \sigma_{i-1}(e_i)$ und $\dim I(i) = \sigma_n ... \sigma_{i+1}(e_i)$
2. $P(i) \cong S_1^- ... S_{i-1}^- S(i)$ und $I(i) \cong S_n^+ ... S_{i+1}^+ S(i)$

Proposition 3: Sei X eine unzerlegbare Darstellung von Q. Dann gilt:

1. $C^+ X = 0$ genau dann, wenn $X \cong P(i)$ für einen Knoten i von Q.
2. $C^- X = 0$ genau dann, wenn $X \cong I(i)$ für einen Knoten i von Q.

3 Präprojektive und Präinjektive Darstellungen

Sei Q ein Köcher der keinen orientierten Zykel enthält. Wir definieren drei Arten von Darstellungen:

Definition 2: Sei X eine unzerlegbare Darstellung von Q.

1. X heisst **präprojektiv**, wenn $X \cong C^r P(i)$ für einen Knoten i und ein $r \leq 0$.
2. X heisst **präinjektiv**, wenn $X \cong C^r I(i)$ für einen Knoten i und ein $r \geq 0$.
3. X heisst **regulär**, wenn $C^r X \neq 0$ für alle r $\in \mathbb{Z}$.

Bemerkung: X ist genau dann präprojektiv, wenn $C^r X = 0$ für ein $r > 0$, und X ist genau dann präinjektiv, wenn $C^r X = 0$ für ein $r < 0$. Dies folgt direkt aus Proposition 3.

Proposition 4: Eine unzerlegbare Darstellung ist präprojektiv, präinjektiv oder regulär. Seien X, Y unzerlegbare Darstellungen und sei X präprojektiv oder präinjektiv, dann gilt $X \cong Y$ genau dann, wenn $\dim X = \dim Y$. Und es gilt:

1. Aus $C^r P(i) \cong C^s P(j) \neq 0$ folgt $i = j$ und $r = s$.
2. Aus $C^r I(i) \cong C^s I(j) \neq 0$ folgt $i = j$ und $r = s$.