DYNKINSCHE UND EUKLIDSCHE DIAGRAMME I

David Bernhard
Matthias Graf
Matthias Meiwes

Endliche Graphen. Sei $\Gamma = (V, K)$ ein endlicher Graph mit Knoten $V = \{1, ...n\}$ und Kanten K. Die Anzahl der Kanten zwischen zwei Knoten i und j sei $d_{ij} = d_{ji}$. Der Graph Γ induziert eine **symmetrische Bilinearform**

$$(-,-) : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad (e_i, e_j) = \begin{cases} -d_{ij} & \text{falls } i \neq j, \\ 2 - 2d_{ii} & \text{falls } i = j, \end{cases}$$

und eine **quadratische Form**

$$q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \sum_{i \leq j} d_{ij} x_i x_j.$$

Bemerkung.

(1) Γ, $(-,-)$ und q bestimmen sich gegenseitig, da $q(x) = \frac{1}{2}(x, x)$ und $(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$.
(2) Sei Q ein Köcher und Γ der ihm zugrunde liegende Graph. Die symmetrische Biliniarform, wie sie schon früher definiert wurde, stimmt mit der für Γ jetzt definierten überein.

Definition 1. *Das* ***Radikal*** *der Form q ist die Menge* ***rad q*** $= \{x \in \mathbb{Z}^n \,|(x, -) = 0\}$.

Definition 2. *Sei* $x \in \mathbb{Z}^n$.

(1) $x \geq 0 :\iff \forall i : x_i \geq 0$
(2) $x > 0 :\iff x \geq 0 \quad \textit{und} \quad x \neq 0 \quad (\textit{d.h.} \quad \exists i : x_i \neq 0)$
(3) *x heisst* ***aufrichtig****, falls* $x_i \neq 0$ *für alle i.*

Definition 3. *Sei q:* $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ *eine quadratische Form.*

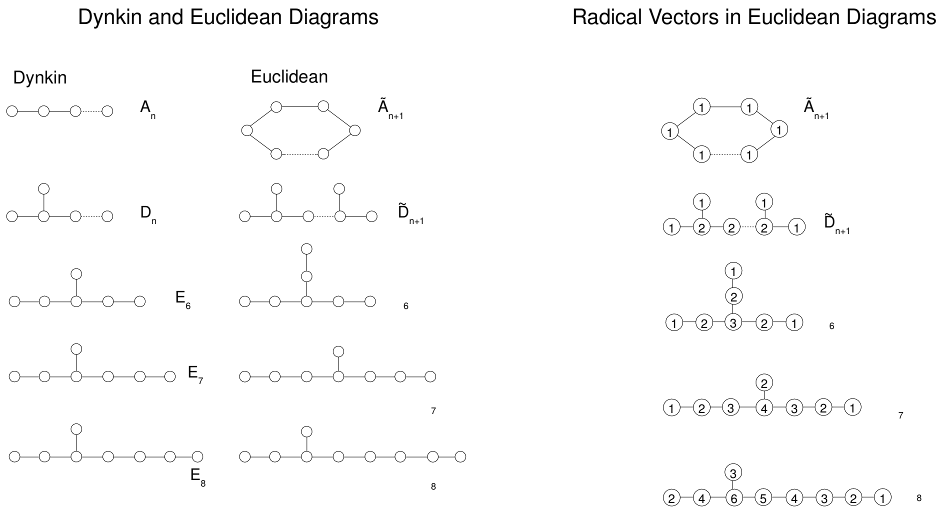
(1) *q ist* ***positiv definit****, falls* $q(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{Z}^n$*, mit* $x \neq 0$.
(2) *q ist* ***positiv semi-definit****, falls* $q(x) \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{Z}^n$.

Date: 18.11.08.

Lemma (4.1.3). *Sei Γ zusammenhängend und $y \in rad\ q$, $y > 0$. Dann ist y aufrichtig und q ist positiv semi-definit. Für $x \in \mathbb{Z}^n$ gilt*

$$q(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{Q}y \quad \Leftrightarrow \quad x \in rad\ q.$$

Korollar. *$rad\ q$ ist ein 1-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{Z}^n$.*



Definition 4. *Ein Graph $\Gamma' = (V', K')$ ist ein* ***Subgraph*** *eines Graphen $\Gamma = (V, K)$, falls $V' \subseteq V$, $K' \subseteq K$ und $((v_1, v_2) \in K' \Rightarrow v_1, v_2 \in V')$.*

Satz. *Jeder zusammenhängende Graph ist entweder Dynkinsch, Euklidsch oder hat einen Euklidschen Subgraphen.*

Satz (4.2.1). *Sei Γ ein zusammenhängender Graph und q die davon induzierte quadratische Form.*

(1) *Γ ist genau dann ein Dynkinsches Diagramm, wenn q positiv definit ist.*
(2) *Γ ist genau dann ein Euklidsches Diagramm, wenn q positiv semi-definit, aber nicht positiv definit ist. In diesem Fall gibt es ein eindeutiges positives $\delta \in \mathbb{Z}^n$ mit $rad\ q = \mathbb{Z}\delta$.*

Definition 5. *Sei $\Delta = \{x \in \mathbb{Z}^n | q(x) \leq 1\}$. Ein Element $x \in \Delta$, $x \neq 0$, heisst* ***Wurzel****.*

Proposition (4.3.1). *Sei Γ Dynkinsch oder Euklidsch.*

(1) *Jedes e_i ist eine Wurzel.*
(2) *Für $x \in \Delta$ und $y \in rad\ q$ sind $-x, x+y \in \Delta$.*
(3) *Jede Wurzel ist entweder positiv oder negativ.*
(4) *Ist Γ Euklidsch dann ist $\Delta/rad\ q$ endlich.*
(5) *Ist Γ Dynkinsch dann ist Δ endlich.*

Lemma (4.3.2). *Sei Q ein Köcher, dessen zugrunde liegender Graph Dynkinsch oder Euklidsch ist. Ist x eine positive Wurzel und $\sigma_i(x)$ nicht positiv, dann ist $x = e_i$.*

Die Coxeter Transformation. Sei Q ein Köcher ohne orientierte Zykel und $i_1, ..., i_n$ eine zulässige Ordnung dessen Knoten. Der Automorphismus

$$c : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n \quad \text{mit} \quad c(x) = \sigma_1 ... \sigma_n(x)$$

heisst **Coxeter Transformation**.

Lemma (4.4.1). (1) *$c(dimP(i)) = -dimI(i)$ für jeden Knoten i.*
(2) *$\{dimP(i) | i \in Q_0\}$ und $\{dimI(i) | i \in Q_o\}$ bilden zwei Basen von $\mathbb{Z}^n$.*

Lemma (4.4.2). *Sei $x, y \in \mathbb{Z}^n$.*

(1) *$\langle dimP(i), x \rangle = x_i = \langle x, dimI(i) \rangle$ für jeden Knoten i.*
(2) *$\langle x, y \rangle = - \langle y, c(x) \rangle = \langle c(x), c(y) \rangle$.*

Lemma (4.4.3). *Sei $x \in \mathbb{Z}^n$. Dann ist $c(x) = x \Leftrightarrow x \in rad\ q$.*

Sei nun Q Dynkinsch oder Euklidsch. c indiziert eine Permutation auf der endlichen Menge Δ/rad q. Folglich ist c^h die Identität auf Δ/rad q für ein $h > 0$. c^h ist sogar die Identität auf $\mathbb{Z}^n$/rad q, da $e_i \in \Delta$ für alle i.

Lemma (4.4.4). *Sei Q Dynkinsch und $x \in \mathbb{Z}^n$.*
Dann gibt es ein $r \geq 0$, so dass $c^r(x)$ nicht positiv ist.

Lemma (4.4.5). *Sei Q Euklidsch und $x \in \mathbb{Z}^n$.*

(1) *Ist $c^r(x) < 0$ für alle $r \in \mathbb{Z}$, dann ist $c^h(x) = x$, für ein $h > 0$.*
(2) *Ist $c^h(x) = x$, dann ist $\langle \delta, x \rangle = 0$.*