Der Satz von Gabriel

Florian Naef und Michael Gröchenig

November 20, 2008

Satz *Sei Q ein Köcher mit einem Dynkin-Diagramm als zugrunde liegenden Graphen. Dann induziert die Zuordnung*

$$X \mapsto dim X$$

eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen unzerlegbarer Darstellungen und den positiven Wurzeln der zugehörigen Quadratischen Form. Insbesondre gibt es nur endlich viele unzerlegbare Darstellungen und alle sind präinjektiv und präprojektiv.

Bemerkung Die Anzahl Isomorphieklassen unzerlegbarer Darstellungen von $\mathbb{A}_n$, $\mathbb{D}_n$ mit $n \geq 4$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$ sind $\frac{1}{2}n(n+1)$, $n^2 - n$, 36, 63, 120.[1]

Definition Eine Darstellung X eines Köchers Q heisst *Schursche Darstellung* (engl. *brick*), falls $End(X) = \mathbb{K}$ ist. Schursche Darstellungen sind immer unzerlegbar.

Satz *Die unzerlegbaren Darstellungen eines Köchers vom Dynkin-Typ sind Schursche Darstellungen.*

Lemma *Enthält Q eine Unterköcher von unendlichem Darstellungstyp, so ist auch Q von unendlichem Darstellungstyp.*

Satz *Ein Köcher vom $\tilde{\mathbb{A}}_n$-Typ besitzt unendlich viele unzerlegbare Darstellungen.*

Lemma *Ist Q ein kreisfreier Köcher und X eine Schursche Darstellung und es existiert ein $a \in Q_0$ mit $dim X_a > 1$, dann hat der Köcher $Q' := (Q_0 \cup \{b\}, Q_1 \cup \{\alpha\})$, wobei $\alpha : b \to a$, unendlichen Darstellungstyp.*

[1] N. Bourbaki, Algèbres de Lie, chap IV, Masson, Paris, 1980

Korollar Die Köcher vom Typ $\tilde{\mathbb{D}}_n$ $(n \geq 4)$, $\tilde{\mathbb{E}}_6$, $\tilde{\mathbb{E}}_7$, $\tilde{\mathbb{E}}_8$ haben unendlichen Darstellungstyp.

Satz von Gabriel *Ein zusammenhängender Köcher ist genau dann von endlichem Darstellungstyp, wenn der zugrunde liegende Graph ein Dynkin-Diagramm ist.*