# Aufbau der projektiven Geometrie

Seminar ueber Projektive Geometrie

Irfan Ebibi    Georg Oberdieck

25. September 2009

Sei $\underline{\mathbb{P}} = (\mathbb{P}, G, I)$ ein nicht ausgearteter Projektiver Raum.

**Notation 1.** *Zu einer Grade $g$ bezeichne $(g)$ die Menge aller Punkte die auf $g$ liegen.*

**Definition 2.** *$U \subset \mathbb{P}$ heisst Linearmenge, falls $\forall P, Q \in U gilt (PQ) \subset U$.*

**Definition 3.** *$< X > := \bigcap \Big\{ U \ \mid U \text{ ist Linearmenge und } X \subset U \Big\}$ heisst das Erzeugnis einer Teilmenge $X \subset \mathbb{P}$. Man schreibt auch oft $< X, Y >$ für $< X \cup Y >$ oder auch $< X, P >$ für $< X \cup \{P\} >$ etc.*

**Definition 4.** *Drei Punkte heissen kollinear, wenn sie auf einer gemeinsamen Grade liegen. Sie heissen nicht-kollinear, wenn nicht. $< P, Q, R >$ für drei nicht kollineare Punkte heisst eine Ebene.*

**Theorem 5.** *$U$ eine Linearmenge eines Projektiven Raumes $\underline{\mathbb{P}}$. $P \notin U$, dann ist*

$$< U, P > = \bigcup \{(PQ) \mid Q \in U\}$$

Allgemeiner gilt auch:

**Theorem 6** (Übung 16 und 17). *Seien $U, V$ nicht leere Linearmengen. Dann ist*

$$< U, V > = \bigcup \{(PQ) \mid P \in U, Q \in V\}$$

Es gilt dann wegen Thm. 5 die folgende Austauscheigenschaft:

**Lemma 7.** *Sei $U$ eine Linearmenge, $P \notin U$:*

$$R \in < U, P > \setminus U \quad \Longrightarrow \quad < U, P > = < U, R >$$

*Beweis.* Da $< U, P >= \bigcup\{(PQ), Q \in U\}$ folgt $\exists Q \in U$ sodass $R \in (PQ)$. Deshalb $P \in (QR)$, d.h. $P \in < U, R >$. □

**Definition 8.**

- *$B \subset \mathbb{P}$ heisst unabhängig, falls für alle $B' \subset B$ und $P \in B \setminus B'$ gilt: $P \notin < B' >$.*
- *Ist $B \subset \mathbb{P}$ unabhängig und $< B > = \mathbb{P}$, dann heisst $B$ Basis von $\underline{\mathbb{P}}$.*

Es ist dann leicht zu zeigen, dass $B$ eine Basis ist, genau dann, wenn $B$ minimal ist unter allen Erzeugendensystemen von $\mathbb{P}$. Falls ein endliches Erzeugendensystem existiert, heisst $\mathbb{P}$ endlich erzeugt und $\mathbb{P}$ besitzt eine endliche Basis. Dies ist im Folgenden immer angenommen.

**Lemma 9.** *Sei $B$ eine endliche und unabhängige Menge von Punkten von $\underline{\mathbb{P}}$ und $B_1, B_2$ Teilmengen. Dann gilt:*

$$< B_1 \cap B_2 > \quad = \quad < B_1 > \ \cap \ < B_2 > .$$

**Theorem 10** (Steinitz'scher Austauschsatz)**.** *Sei $B$ eine endliche Basis von $\underline{\mathbb{P}}$, $r = |B|$. Für jede unabhängige Menge $C \subset \mathbb{P}$ mit $|C| = s$ gilt:*

*(a)* $s \leq r$

*(b)* *$\exists$ Teilmenge $A \subset B$ mit $|A| = r - s$ sodass $C \cup A$ eine Basis ist.*

Für den Beweis braucht man folgendes Hilfslemma:

**Lemma 11** (Hilfslemma)**.** *Sei $B$ eine endliche Basis von $\underline{\mathbb{P}}$ und $P \in \mathbb{P}$. Dann $\exists Q \in B$ derart, dass $(B \setminus \{Q\}) \cup \{P\}$ eine Basis ist.*

Nun erhält man damit als Korollar den wichtigen Basisergänzungssatz:

**Korollar 12** (Basisergänzungssatz)**.** *Sei $\underline{\mathbb{P}}$ ein endlich erzeugter proj. Raum. Zwei Basen von $\underline{\mathbb{P}}$ haben die selbe Anzahl Elemente und jede unabhängige Menge kann zu einer Basis ergänzt werden.*

**Definition 13.** *Sei $\underline{\mathbb{P}}$ ein endlich erzeugter proj. Raum, $B$ eine Basis. Dann heisst $|B|$ der Rang und $|B| - 1$ die Dimension von $\underline{\mathbb{P}}$. Genauso definiert man den Rang bzw. die Dimension für lineare Unterräume $U$. Aus dem obigen folgt die Wohldefiniertheit.*

**Definition 14.** *Mit*

$$\begin{aligned} U(\underline{\mathbb{P}}) &:= \Big\{ \textit{Menge aller Unterräume} \Big\} \\ U_i(\underline{\mathbb{P}}) &:= \Big\{ \textit{Unterräume vom Rang } i \Big\} \end{aligned}$$

*erhält man eine Geometrie $(U(\underline{\mathbb{P}}), \subseteq)$; man nennt sie die projektive Geometrie zu $(\mathbb{P}, G, I)$.*

Es gilt außerdem

**Theorem 15** (Dimensionsformel)**.** *Für $U, W$ lineare Unterräume von $\underline{\mathbb{P}}$ haben wir*

$$\dim(< U, W >) \quad = \quad \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

## Literaturangabe:

Kapitel 1.3 von A. Beutelspacher, U. Rosenbaum, Projektive Geometrie, Vieweg, 2004.