Quadratische Mengen
Definition, Index, Kleine Dimensionen

Manuela Dübendorfer Marco Cincera

1. Dezember 2009

1 Grundlegende Definitionen

Definition 1.1. Sei $\mathbf{P}$ ein projektiver Raum beliebiger Dinension, und sei $\mathcal{Q}$ eine Menge von Punkten von $\mathbf{P}$.

Eine Gerade g ist eine **Tangente** an $\mathcal{Q}$, wenn g mit $\mathcal{Q}$ nur einen Punkt gemeinsam hat oder wenn jeder Punkt von g in $\mathcal{Q}$ enthalten ist. Hat g nur den Punkt P mit $\mathcal{Q}$ gemeinsam, so nennt man g eine **Tangente an $\mathcal{Q}$ in** P.

Eine Gerade mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt von g in $\mathcal{Q}$ liegt wird auch **$\mathcal{Q}$-Gerade** genannt. Allgemein nennt man einen Unterraum $\mathbf{U}$ einen $\mathcal{Q}$-Unterraum, falls jeder Punkt von $\mathbf{U}$ in $\mathcal{Q}$ liegt.

Für jeden Punkt $P \in \mathcal{Q}$ sei $\mathcal{Q}_P$ die Menge derjenigen Punkte von $\mathbf{P}$, die auf einer Tangente durch P liegen. Man nennt $\mathcal{Q}_P$ den **Tangentialraum** von P an $\mathcal{Q}$.

Die Menge $\mathcal{Q}$ heisst eine **quadratische Menge** von $\mathbf{P}$, falls sie die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

i) Jede Gerade g, die mindestens drei Punkte von $\mathcal{Q}$ enthält, ist ganz in $\mathcal{Q}$ enthalten.

ii) $\mathcal{Q}_P$ ist die Menge der Punkte einer Hyperebene oder die Menge aller Punkte von $\mathbf{P}$

Lemma 1.1. *Sei $\mathcal{Q}$ eine quadratische Menge von $\mathbf{P}$, und sei $\mathbf{U}$ ein Unterraum von $\mathbf{P}$. Dann ist die Menge $\mathcal{Q}' := \mathcal{Q} \cap \mathbf{U}$ eine quadratische Menge von $\mathbf{U}$. Ferner gilt*

$$\mathcal{Q}'_P = \mathcal{Q}_P \cap \mathbf{U}$$

für alle Punkte $P \in \mathcal{Q}'$.

Man sagt auch, $\mathcal{Q}$ **induziert** *eine quadratische Menge in dem Unterraum $\mathbf{U}$.*

Definition 1.2. Sei $\mathcal{Q}$ eine quadratische Menge von $\mathbf{P}$.

Das **Radikal** von $\mathcal{Q}$ ist die Menge $\mathrm{Rad}(\mathcal{Q})$ der Punkte $P \in \mathcal{Q}$, die die Eigenschaft haben, dass $\mathcal{Q}_P$ aus allen Punkten von $\mathbf{P}$ besteht.

Man sagt, $\mathcal{Q}$ sei **nichtausgeartet**, falls $\mathrm{Rad}(\mathcal{Q}) = \emptyset$.

Satz 1.1. *Sei $\mathcal{Q}$ eine quadratische Menge von $\mathbf{P}$.*

i) Das Radikal von $\mathcal{Q}$ ist ein linearer Unterraum von $\mathbf{P}$.

ii) Sei $\mathbf{U}$ ein Komplement von $\mathrm{Rad}(\mathcal{Q})$ (ein Unterraum $\mathbf{U}$ mit $\mathbf{U} \cap \mathrm{Rad}(\mathcal{Q}) = \emptyset$ und $\langle \mathbf{U}, \mathrm{Rad}(\mathcal{Q}) \rangle = \mathbf{P}$). Dann ist $\mathcal{Q}' := \mathcal{Q} \cap U$ eine nichtausgeartete quadratische Menge von $\mathbf{U}$.

iii) $\mathcal{Q}$ besteht aus all den Punkten, die auf Geraden liegen, die einen Punkt von $\mathrm{Rad}(\mathcal{Q})$ mit einem Punkt von $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} \cap \mathbf{U}$ verbinden.

Lemma 1.2. *Sei $\mathcal{Q}$ eine nichtausgeartete quadratische Menge von $\mathbf{P}$. Dann gilt für je zwei verschiedene Punkte $P, R \in \mathcal{Q}$, dass $\mathcal{Q}_P \neq \mathcal{Q}_R$.*

Lemma 1.3. *Sei $\mathcal{Q}$ eine nichtausgeartete quadratische Menge von $\mathbf{P}$.*

i) Ist $P \in \mathcal{Q}$ und $\mathbf{W}$ ein Komplement von P in $\mathcal{Q}_P$, dann ist $\mathcal{Q}' := \mathcal{Q} \cap \mathbf{W}$ eine nichtausgeartete quadratische Menge von $\mathbf{W}$.

ii) Ist $\mathbf{H}$ eine Hyperebene, die keine Tangentialhyperebene ist, so ist $\mathcal{Q}' := \mathcal{Q} \cap \mathbf{H}$ eine nichtausgeartete quadratische Menge von $\mathbf{H}$.

2 Der Index einer quadratischen Menge

Definition 2.1. Sei $t-1$ die grösste Dimension eines $\mathcal{Q}$-Unterraums. Dann heisst t der **Index** von $\mathcal{Q}$. Man nennt die $\mathcal{Q}$-Unterräume der Dimension $t-1$ auch **maximale** $\mathcal{Q}$-Unterräume.

Lemma 2.1. *Sei $\mathcal{Q}$ eine quadratische Menge vom Index t in $\mathbf{P}$. Dann geht durch jeden Punkt von $\mathcal{Q}$ ein maximaler $\mathcal{Q}$-Unterraum.*

Korollar 2.1. *Jede quadratische Menge $\mathcal{Q}$ besitzt die „1 oder alle - Eigenschaft“, d.h. jeder Punkt $P \in \mathcal{Q}$ mit $P \notin g \subset \mathcal{Q}$ ist mit genau einem oder mit allen Punkten von g durch eine $\mathcal{Q}$-Gerade verbunden.*

Lemma 2.2. *Sei $\mathcal{Q}$ eine quadratische Menge in $\mathbf{P}$ und sei $\mathbf{S}$ eine Teilmenge von $\mathcal{Q}$ mit der Eigenschaft, dass die Verbindungsgerade je zweier Punkte von $\mathbf{S}$ eine $\mathcal{Q}$-Gerade ist. Dann ist $\langle \mathbf{S} \rangle$ ein $\mathcal{Q}$-Unterraum.*

Satz 2.1. *Sei $\mathcal{Q}$ eine quadratische Menge vom Index t in einem d - dimensionalen projektiven Raum $\mathbf{P}$, und sei $\mathbf{U}$ ein maximaler $\mathcal{Q}$-Unterraum. Ist $\mathcal{Q}$ nichtausgeartet, so gibt es einen zu $\mathbf{U}$ windschiefen maximalen $\mathcal{Q}$-Unterraum.*

Satz 2.2. *Sei $\mathcal{Q}$ eine nichtausgeartete Menge vom Index t in einem d - dimensionalen projektiven Raum* $\mathbf{P}$*. Dann gilt*

$$\begin{cases} t \leq \frac{d}{2}, & d \text{ gerade} \\ t \leq \frac{d+1}{2}, & d \text{ ungerade} \end{cases}$$

3 Quadratische Mengen in Räumen kleiner Dimension

Definition 3.1. Eine nichtleere Punktmenge $\mathcal{O}$ einer projektiven Ebene heisst ein **Oval**, falls keine drei Punkte von $\mathcal{O}$ kollinear sind und durch jeden Punkt von $\mathcal{O}$ genau eine Tangente geht.

Satz 3.1. *Sei $\mathcal{Q}$ eine quadratische Menge einer projektiven Ebene* $\mathbf{P}$*. Dann ist $\mathcal{Q}$ die leere Menge, ein Punkt, eine Gerade, ein Oval, die Punktmenge zweier Geraden oder die gesamte Punktmenge.*

Es gibt also nur einen Typ von nichtleeren, nichtausgearteten quadratischen Mengen in $\mathbf{P}$*, nämlich die Ovale.*

Definition 3.2. Sei $\mathbf{P}$ ein d-dimensionaler projektiver Raum.

i) Ein **Ovoid** ist eine nichtleere Menge $\mathcal{O}$ von Punkten von $\mathbf{P}$ mit folgender Eigenschaft:

- Keine drei Punkte von $\mathcal{O}$ sind kollinear;
- für jeden Punkt $P \in \mathcal{O}$ gilt: Die Tangenten in P an $\mathcal{O}$ überdecken genau eine Hyperebene.

Sei nun $d = 3$.

ii) Eine Menge $\mathcal{K}$ von Punkten von $\mathbf{P}$ heisst **Kegel**, falls es eine Ebene $\mathbf{E}$ und ein Oval $\mathcal{O}$ in $\mathbf{E}$, sowie einen Punkt $S \notin \mathbf{E}$ gibt, so dass $\mathcal{K}$ aus den Punkten der Geraden SX ($X \in \mathcal{O}$) besteht. Man nennt S die **Spitze** des Kegels $\mathcal{K}$.

iii) Ein **Hyperboloid** ist eine Menge von Punkten, die auf den Geraden eines Regulus liegen.

Satz 3.2. *Sei $\mathcal{Q}$ eine quadratische Menge eines dreidimensionalen projektiven Raumes* $\mathbf{P}$*. Ist $\mathcal{Q}$ kein Unterraum, so ist $\mathcal{Q}$ ein Ovoid, ein Kegel, ein Hyperboloid oder die Vereinigung der Punktmengen zweier Hyperebenen.*

Somit sind die nichtausgearteten quadratischen Mengen in $\mathbf{P}$ *genau die Ovoide und die Hyperboloide.*