Charakterisierung von Quadratische Mengen

Urs Müller, Reto Häberli

4. Dez. 2009

1 Quadratische Mengen in endlichen projektiven Räumen

In diesem Kapitel untersuchen wir quadratische Mengen in endlichen projektiven Räumen. Es wird sich herausstellen, dass die obere Grenze für den Index einer nicht ausgearteten quadratischen Menge aus dem vorherigen Kapitel auch schon fast die untere ist. Insbesondere wird sich zeigen, dass es nur drei Typen von nichtausgearteten quadratischen Mengen in endlichen projektiven Räumen gibt.
Sei nun bis auf weiteres $\mathbf{P} = \mathrm{PG}(d,q)$ ein endlicher projektiver Raum der Dimension d und der Ordnung q und sei $\mathcal{Q}$ eine projektive Ebene in $\mathbf{P}$.

Lemma 4.4.1 Für einen Punkt $\mathrm{P} \in \mathcal{Q}\backslash\mathrm{Rad}(\mathcal{Q})$ sei a $(= a_P)$ die Anzahl der $\mathcal{Q}$-Geraden durch P. Dann gilt:
(a) Ist $\mathcal{Q}_P$ eine Hyperebene, so enthält $\mathcal{Q}_P$ genau $aq + 1$ Punkte von $\mathcal{Q}$.
(b) Es gilt $|\mathcal{Q}| = 1{+}q^{d-1}{+}aq$. Insbesondere ist a unabhängig von der Auswahl des Punktes P aus $\mathcal{Q}\backslash\mathrm{Rad}(\mathcal{Q})$.

Satz 4.4.3 In $\mathbf{P} = \mathrm{PG}(2t,q)$ hat jeder nichtleere, nichtausgeartete quadratische Menge den Index t.

Als Folge davon ergibt sich dieser wichtiger Satz von Ernst Witt (1911-1991):

Satz 4.4.4 Sei $\mathcal{Q}$ eine nichtleere, nichtausgeartete quadratische Menge eines endlichen projektiven Raumes $\mathbf{P}$ der Dimension d. Dann gibt es für den Index s von $\mathcal{Q}$ nur drei Möglichkeiten:

$$s = \frac{d}{2}, \text{ für } d \text{ gerade, und } s = \frac{d-1}{2} \text{ oder } s = \frac{d+1}{2}, \text{ für } d \text{ ungerade}$$

2 Elliptische, parabolische und hyperbolische quadratische Mengen

Im Folgenden betrachten wir wieder allgemeine (also nicht notwendigerweise endliche) projektive Räume.

Def. Sei $\mathcal{Q}$ eine nichtausgeartete quadratische Menge in einem d-dim. proj. Raum $\mathbf{P}$. Ist d gerade und hat $\mathcal{Q}$ den Index $d/2$, so heisst $\mathcal{Q}$ **parabolisch**. Ist d ungerade, so heisst $\mathcal{Q}$ **elliptisch**, falls $\mathcal{Q}$ den Index $(d$ - $1)/2$ hat, und **hyperbolisch**, falls $\mathcal{Q}$ den Index $(d + 1)/2$ hat.

Def. Sei $\mathbf{H}$ eine Hyperebene des projektiven Raumes $\mathbf{P}$ und sei S ein Punkt, der nicht in $\mathbf{H}$ liegt. Ist $\mathcal{Q}^*$ eine nichtausgeartete quadratische Menge von $\mathbf{H}$, so heisst die quadratische Menge $\mathcal{Q} = \bigcup_{X\in\mathcal{Q}^*}(\mathrm{SX})$ ein **Kegel** mit **Spitze S** über $\mathcal{Q}^*$.

Nun betrachten wir die besonders wichtigen hyperbolischen quadratischen Mengen etwas genauer:

Satz 4.5.3 Sei $\mathcal{Q}$ eine hyperbolische quadratische Menge in einem $(2t+1)$-dim. proj. Raum $\mathbf{P}$ $(t \geq 2)$.
(a) Sei $\mathbf{H} = \mathcal{Q}_P$ eine Tangentialhyperebene. Dann ist $\mathcal{Q}' := \mathcal{Q} \cap \mathbf{H}$ ein Kegel über einer hyperbolischen quadratischen Menge.
(b) Sei $\mathbf{H}^*$ eine Hyperebene, die keine Tangentialebene ist. Dann ist $\mathcal{Q}^* := \mathcal{Q} \cap \mathbf{H}^*$ eine parabolische quadratische Menge.

Korollar 4.5.4 Wenn in einem projektiven Raum $\mathbf{P}$ eine hyperbolische quadratische Menge existiert, dann ist $\mathbf{P}$ papossch, also über einem kommutativen Körper koordinatisiert.

Satz 4.5.5 Sei $\mathcal{Q}$ eine hyperbolische quadratische Menge in $\mathbf{P} = \mathrm{PG}(5,q)$. Dann gilt für die Anzahl a der $\mathcal{Q}$-Geraden durch einen Punkt $a = (q+1)^2$ und $|\mathcal{Q}| = (q^2+q+1)(q^2+1)$.

Ganz identisch gilt für elliptische quadratische Mengen:

Aufgabe 17
Sei $\mathcal{Q}$ eine elliptische quadratische Menge in einem $(2t+1)$-dim. proj. Raum $\mathbf{P}$ $(t \geq 2)$.
(a) Sei $\mathbf{H} = \mathcal{Q}_P$ eine Tangentialhyperebene. Dann ist $\mathcal{Q}' := \mathcal{Q} \cap \mathbf{H}$ ein Kegel über einer elliptischen quadratischen Menge.
(b) Sei $\mathbf{H}^*$ eine Hyperebene, die keine Tangentialebene ist. Dann ist $\mathcal{Q}^* := \mathcal{Q} \cap \mathbf{H}^*$ eine parabolische quadratische Menge.

Analog gilt für parabolische quadratische Mengen:

Satz 4.5.2 Sei $\mathcal{Q}$ eine parabolische quadratische Menge in einem $2t$-dim. proj. Raum $\mathbf{P}$ $(t \geq 2)$.
(a) Sei $\mathbf{H} = \mathcal{Q}_P$ eine Tangentialhyperebene. Dann ist $\mathcal{Q}' := \mathcal{Q} \cap \mathbf{H}$ ein Kegel über einer parabolischen quadratischen Menge.
(b) Sei $\mathbf{H}^*$ eine Hyperebene, die keine Tangentialebene ist. Dann ist $\mathcal{Q}^* := \mathcal{Q} \cap \mathbf{H}^*$ eine elliptische oder eine hyperbolische quadratische Menge.

Def: Sei $\mathcal{Q}$ eine hyperbolische quadratische Menge eines 5-dim. projektiven Raumes $\mathbf{P}$. Wir sagen, dass zwei $\mathcal{Q}$-Ebenen $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ **äquivalent** ($\mathbf{E}_1 \sim \mathbf{E}_2$) sind, falls $\mathbf{E}_1$ und $\mathbf{E}_2$ gleich sind oder sich in genau einem Punkt schneiden.

Lemma 4.5.6 Sei $\mathcal{Q}$ eine hyperbolische quadratische Menge eines 5-dim. proj. Raumes $\mathbf{P}$. Dann ist die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Satz 4.5.7 Sei $\mathcal{Q}$ eine hyperbolische quadratische Menge eines 5-dim. projektiven Raumes $\mathbf{P}$. Dann zerfällt die Menge aller $\mathcal{Q}$-Ebenen in genau zwei Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$.

Def: Sei $\mathcal{Q}$ eine hyperbolische quadratische Menge eines $(2t+1)$-dim. proj. Raumes $\mathbf{P}$. Für zwei maximale $\mathcal{Q}$-Unterräume $\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2$ definieren wir:

$$\mathbf{U}_1 \sim \mathbf{U}_2 :\Leftrightarrow t + \dim(\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2) \text{ ist gerade.}$$

Satz 4.5.8 Sei $\mathcal{Q}$ eine hyperbolische quadratische Menge eines 7-dim. proj. Raumes $\mathbf{P}$. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation mit genau zwei Äquivalenzklassen.