Quadriken und Kleinsche quadratische Mengen

Nicolas Herzog, Vladimir Serbinenko

11.12.2009

4.7 Quadriken

Definition. *Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine Abbildung $q : V \to K$ heisst* quadratische Form auf V, *falls gilt*

(i) $\forall v \in V, k \in K : q(k \cdot v) = k^2 \cdot q(v)$

(ii) Die Abbildung $B : V \times V \to K$, welche durch $B(v, w) := q(v + w) - q(v) - q(w)$ definiert ist, ist eine symmetrische Bilinearform.

Lemma 4.7.1. *Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis des Vektorraums V, dann gilt: Für $a_{ij} \in K\ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ist $q : V \to K$,*

$$v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i \mapsto q(v) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot k_i k_j$$

eine quadratische Form. Umgekehrt gibt es zu jeder quadratischen Form solche $a_{ij} \in K$.

Definition. *Eine quadratische Form q heisst* nichtausgeartet*, falls gilt:*

$$\forall v \in V : q(v) = 0, \forall x \in V : B(x, v) = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Definition. *Die* zu q gehörige Quadrik $\mathcal{Q}$ des projektiven Raums $\mathbb{P}(V)$ *ist die Menge aller Punkte $\langle v \rangle$ von $\mathbb{P}(V)$ mit $q(v) = 0$.*

Mit Lemma 4.7.0.1 können also viele Quadriken konstruiert werden: In einem projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$ der Dimension d über dem Körper K bestimmt ein quadratisches Polynom f in $d + 1$ Unbestimmten eine Quadrik, nämlich als die Punkte in $\mathbb{P}$ mit homogenen Koordinaten $(k_0 : k_1 : \cdots : k_d)$, welche $f(k_0, k_1, \ldots, k_d) = 0$ erfüllen.

Lemma 4.7.2. *Wenn eine Gerade g von $\mathbb{P}(V)$ drei Punkte einer Quadrik $\mathcal{Q}$ enthält, dann liegt jeder Punkt von g in $\mathcal{Q}$.*

Lemma 4.7.3. *Sei q eine quadratische Form auf dem Vektorraum V, und sei $\mathcal{Q}$ die zugehörige Quadrik von $\mathbb{P}(V)$. Dann gilt für jeden Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\langle v \rangle^\perp := \{x \in V \mid B(x, v) = 0\}$:*

(i) $\langle v \rangle^\perp$ ist ein Unterraum von V und damit auch ein Unterraum von $\mathbb{P}(V)$; $\langle v \rangle^\perp$ ist entweder eine Hyperebene oder der ganze Vektorraum V.

(ii) Sei $\langle v \rangle \in \mathcal{Q}$. Dann enthält jede Gerade in $\langle v \rangle^\perp$ durch $\langle v \rangle$, die einen Punkt $\langle w \rangle \in \mathcal{Q} \setminus \{\langle v \rangle\}$ enthält, nur Punkte aus $\mathcal{Q}$. Damit ist jede Gerade in $\langle v \rangle^\perp$ durch $\langle v \rangle$ eine Tangente an $\mathcal{Q}$. Ausserdem schneidet jede Gerade durch $\langle v \rangle$, die nicht in $\langle v \rangle^\perp$ liegt, $\mathcal{Q}$ in genau einem weiteren Punkt.

Satz 4.7.1. *Jede Quadrik ist eine quadratische Menge. Eine Quadrik ist genau dann nichtausgeartet, wenn die zugehörige quadratische Form nichtausgeartet ist.*

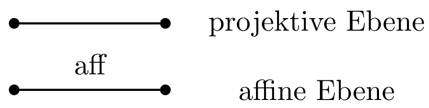
Definition. *Ein* Kegelschnitt *ist eine nichtleere und nichtausgeartete Quadrik in einer projektiven Ebene.*

Satz 4.7.2 (Segre)**.** *Jedes Oval in einer endlichen desarguesschen projektiven Ebene ungerader Ordnung ist ein Kegelschnitt.*

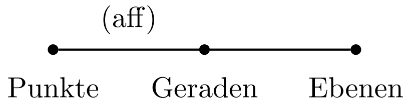
1.7 Diagramme

Die Diagramme sind eine Methode, mit der man allgemeine Geometrien kurz, aber aussagekräftig beschreiben kann. Die wichtigsten Namen in diesem Zusammenhang sind *Tits* und *Buekenhout*.

Definition. *Die* Diagramme der projektiven bzw. affinen Ebene *sind wie folgt definiert:*



Jede Geometrie, die zu einem Diagramm gehört, ist eine Rang r-Geometrie. Für jeden Typ von Objekten gibt es einen Knoten, die Kanten dazwischen beschreiben die Struktur der Objekte der entsprechenden Typen in der gesamten Geometrie. Also ist zum Beispiel



das Diagramm einer dreidimensionalen projektiven bzw. affinen Geometrie. Um nun allgemeine Rang r-Geometrien in Diagrammen auszudrücken, brauchen wir folgende

Definition. *Sei* $\mathbb{G} = (\Omega, I)$ *eine Geometrie. Das* Residuum einer Fahne $\mathcal{F}$ von $\mathbb{G}$ *ist die Geometrie* $Res(\mathcal{F}) = (\Omega', I')$*, deren Elemente diejenigen Elemente von* $\mathbb{G}$ *sind, die nicht in der Fahne* $\mathcal{F}$ *liegen, aber mit jedem Element von* $\mathcal{F}$ *inzidieren (und deren Inzidenz* I' *von* I *induziert wird).*

Um das Residuum einer Fahne $\mathcal{F}$ einer Rang r-Geometrie $\mathbb{G}$ zu bestimmen, bestimmt man zunächst die Typen der Elemente in $\mathcal{F}$ und sucht dann alle Objekte von $\mathbb{G}$, die zwar mit allen Objekten aus $\mathcal{F}$ inzident sind, aber nicht einen Typ von $\mathcal{F}$ haben.

Definition. *Das* Diagramm einer Rang r-Geometrie *ist wie folgt definiert: Jedem Typ von Objekten wird ein* Knoten *zugeordnet. Die* Kante *zwischen zwei Knoten i und j beschreibt die Rang 2-Geometrie, die als Residuen der Fahnen aus $r-2$ Elementen entstehen, die kein Element vom Typ i oder j enthalten. Eine* triviale *(d. h. alle Elemente des einen Typs inzidieren mit allen Elementen des anderen Typs) Rang 2-Geometrie wird durch eine unsichtbare Kante repräsentiert.*

Die durch Diagramme beschreibbaren Geometrien heissen auch *Buekenhout-Tits-Geometrien*.

4.6 Quadratische Mengen

Definition. *Eine* Kleinsche quadratische Menge *ist eine hyperbolische quadratische Menge eines 5-dimensionalen projektiven Raums.*

Definition. *Der* Polarraum *ist die Geometrie, die auf einer quadratischen Menge definiert ist. Sei* $\mathbb{S}$ *der Polarraum in einem 5-dimensionalem projektivem Raum* $\mathbb{P}$ *auf der quadratischen Menge* $\mathcal{Q}$ *und* $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_1$ *die beiden Äquivalenzklassen von* $\mathcal{Q}$*-Ebenen.*

- *Die* $\mathbb{S}$*-Punkte sind die* $\mathcal{Q}$*-Ebenen aus Äquivalenzklasse* $\mathcal{S}_1$*,*
- *die* $\mathbb{S}$*-Geraden sind die* $\mathcal{Q}$*-Punkte,*
- *die* $\mathbb{S}$*-Ebenen sind die* $\mathcal{Q}$*-Ebenen aus Äquivalenzklasse* $\mathcal{S}_2$*,*
- *die Inzidenz zwischen Geraden und Punkten oder Ebenen ist "Durchschnitt nicht leer".*

Lemma 4.6.1. *Sei q die Ordnung von* $\mathbb{P}$*.*

(i) Durch jede $\mathcal{Q}$*-Gerade geht genau eine Ebene jeder Äquivalenzklasse.*

(ii) Durch jeden Punkt von $\mathcal{Q}$ *gehen* $q+1$ *Ebenen jeder Äquivalenzklasse.*

Satz 4.6.1. $\mathbb{S}$ *ist ein 3-dimensionaler projektiver Raum.*

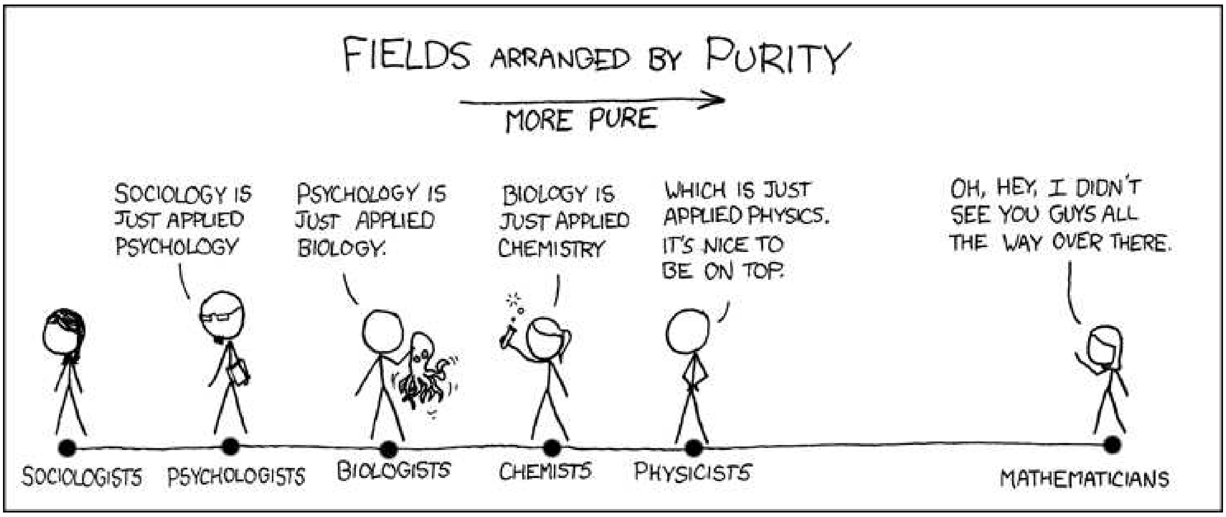
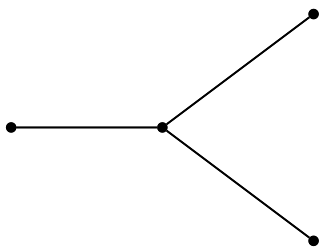


Abbildung 1: Beispiel zu Diagrammen (von xkcd.com)

Satz 4.6.2. *Sei* $\mathbb{S}$ *der Polarraum in einem* 7*-dimensionalem projektivem Raum auf einer quadratischen Menge* Q. *Zwei* 3*-dimensionale Räume seien inzident, wenn sie in einer Ebene schneiden. Dann ist* $\mathbb{S}$ *isomorph zu einer Buekenhout-Tits-Geometrie vom Rang* 4 *mit folgendem Diagramm:*



Bemerkung. *Wenn man obiges Diagramm von* $\mathbb{S}$ *rotiert, entspricht das neue Diagramm wieder einem Polarraum.*

Definition. *Ein* verallgemeinertes Viereck *ist eine Rang* 2*-Geometrie aus Punkten und Geraden mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Je zwei Punkte liegen auf höchstens einer gemeinsamen Geraden.

(ii) Durch jeden Punkt ausserhalb einer Geraden g *gibt es genau eine Gerade, die* g *schneidet.*

Wir verwenden für ein verallgemeinertes Viereck das folgende Diagramm:

Satz 4.5.9. *Die Rang* 3*-Geometrie der Punkten, Geraden und Ebenen einer Kleinschen quadratischen Menge hat die Struktur*

Also ist sie nicht isomorph zu einem dreidimensionalem projektivem Raum.