Plückerkoordinaten

Seminar über Projektive Geometrie, ETH Zürich, 18.12.2009

Remo Berger und Christian Lund

Literatur: p. 162-171 - A. Beutelspacher, U. Rosenbaum, Projektive Geometrie, 2.Auflage, Vierweg, 2004

Plückerkoordinaten gehen auf den Mathematiker Julius Plücker zurück, der diese Mitte des 19. Jahunderts eingeführt hat. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Punkte im 3-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}^3(V)$ über V können wir mittels homogener Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$, $x_i \in K$ ausdrücken. Jetzt wollen wir auch Geraden von $\mathbb{P}^3(V)$ mit homogenen Koordinaten darstellen. Mit Plückerkoordinaten hat J. Plücker ein solche Bijektion zwischen Geraden in $\mathbb{P}^3(V)$ und homogenen Koordinaten in $\mathbb{P}^5(V)$ konstruiert. Die Ziel von diesem Vortrag ist, diese Verbindung zu beschreiben.

Plückerkoordinaten - Definition und Lemma

Definition 0.1 (PLÜCKERKOORDINATEN). *Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, und $\mathbb{P}^3(V)$ ein 3-dimensionaler projektiver Raum über V. Sei g eine Gerade von $\mathbb{P}^3(V)$ durch die Punkte $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ und $(y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$. Wir definieren*

$$p_{01} = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix}, \quad p_{02} = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_2 \end{vmatrix}, \quad p_{03} = \begin{vmatrix} x_0 & x_3 \\ y_0 & y_3 \end{vmatrix},$$

$$p_{23} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \quad p_{31} = \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \quad p_{12} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Dann heisst das 6-Tupel $(p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6) := (p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12})$ die Plücker-Koordinaten der Geraden g.

Lemma 0.2 (4.8.1).

1. *Die Plücker-Koordinaten sind für je zwei Punktepaare einer Geraden (bis auf Vielfache) gleich, d.h. die Plücker-Koordinaten einer Geraden sind also wohldefiniert.*
2. *Die Plücker-Koordinaten einer Geraden sind nur bis auf ein Vielfaches bestimmt; es handelt sich also um homogene Koordinaten.*

3. *Die Plücker-Koordinaten* $P = (p_1 : \cdots : p_6)$ *einer Geraden genügen der Gleichung*

$$F(p_1 : \cdots : p_6) := p_1p_4 + p_3p_5 + p_3p_6 = 0 \qquad (*)$$

4. *Seien* $p_1, \ldots, p_6 \in K$*, sodass mindestens ein* $p_i \neq 0$ *ist. Wenn* $p_1, \ldots, p_6$ *die Gleichung* $(*)$ *erfüllen, so gibt es eine Gerade von* $\mathbb{P}^3(V)$ *mit Plücker-Koordinaten* $(p_1 : \cdots : p_6)$*.*

Lemma 0.3 (4.8.2)**.** *Seien* g *und* h *zwei Geraden von* $\mathbb{P}^3(V)$ *mit Plücker-Koordinaten* $P = (p_1 : \cdots : p_6)$ *und* $Q = (q_1 : \cdots : q_6)$*. Dann gilt:* g *und* h *sind genau dann windschief, wenn der Ausdruck*

$$F(Q, P) := p_1q_4 + p_2q_5 + p_3q_6 + p_4q_1 + p_5q_2 + p_6q_3$$

nicht gleich Null ist.

Lemma 0.4 (4.8.3)**.** *Seien* $P = (p_1 : \cdots : p_6)$ *und* $Q = (q_1 : \cdots : q_6)$ *homogene Koordinaten. Dann gilt für alle* $h, j \in K$

$$F(h \cdot P + j \cdot Q) = h^2 \cdot F(P) + j^2 \cdot F(Q) + hj \cdot F(P, Q)$$

Nach Lemma 4.7.1 (p.159) ist F eine quadratische Form.

Kleinsche/Plückersche Quadrik

Definition 0.5 (KLEINsche Quadrik)**.** *Sei* $\mathbb{P}^5(V)$ *ein 5-dimensionaler projektiver Raum dargestellt durch homogene Koordinaten* $(k_1 : \cdots : k_6)$ *aus einem Körper* K*. Die Menge*

$$\mathcal{K} := \{P \in \mathbb{P}^5(V) \mid F(P) = 0\}$$

der Punkte $P = (p_1 : \cdots : p_6)$ *mit* $F(P) = 0$ *heisst* ***KLEINsche Quadrik*** *(man benutzt auch die Bezeichnung* ***PLÜCKERsche Quadrik*** *für diese Menge).*

Satz 0.1 (4.8.4)**.** *Sei* $\mathbb{P}^5(V)$ *ein 5-dimensionaler projektiver Raum und* $\mathcal{K}$ *eine KLEINsche Quadrik. Dann ist* $\mathcal{K}$ *eine hyperbolische Quadrik, also eine KLEINsche quadratische Menge.*

Definition 0.6. *Wir definieren die Menge* $\mathcal{M}$*, eine Menge von Quadrupeln von Ebenen:*

$$\mathcal{M} := \{(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3) \mid \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}_i \textit{ sind Ebenen mit der Eigenschaft } (**),\ i{=}1,2,3\}$$

Eigenschaft $(**)$*: Es gibt eine Ebene* $\boldsymbol{L}$ *mit*

- E *ist Widschief zu* $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ *und* $\boldsymbol{E}_3$*, und schneidet* $\boldsymbol{L}$ *in einem Punkt,*

- *jede Ebene* $\boldsymbol{E}_i$ *schneidet* $\boldsymbol{L}$ *in einer Geraden* $g_i (i = 1, 2, 3)$,
- *die Geraden* g_1, g_2, g_3 *sind verschieden und gehen nicht durch einen gemeinsamen Punkt,*
- *die Unterräume* $< \boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2 >, < \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3 >$ *und* $< \boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{E}_1 >$ *sind verschiedene 4-dimensionale Unterräume von* $\mathbb{P}^5(V)$.

Lemma 0.7 (4.8.5). *Sei* $\mathbb{P}^5(V)$ *ein 5-dimensionaler projektiver Raum und* $\mathcal{Q}$ *eine KLEINsche quadratische Menge in* $\mathbb{P}^5(V)$. *Dann enthält* $\mathcal{Q}$ *ein Quadrupel von* $\mathcal{Q}$*-Ebenen, das in der Menge* $\mathcal{M}$ *enthalten ist.*

Lemma 0.8 (4.8.6). *Sei* $\mathbb{P}^5(V)$ *ein 5-dimensionaler projektiver Raum. Dann operiert die Gruppe* G *der Kollineationen von* $\mathbb{P}^5(V)$ *transitiv auf der Menge* $\mathcal{M}$.

Lemma 0.9 (4.8.7). *Sei* $\mathbb{P}^5(V)$ *ein 5-dimensionaler projektiver Raum, und seien* $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ *hyperbolische quadratische Mengen, die drei gemeinsame Ebenen* $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}', \boldsymbol{E}''$ *enthalten. Wenn sich* $\boldsymbol{E}'$ *und* $\boldsymbol{E}''$ *in genau einem Punkt* P *schneiden, wenn* $\boldsymbol{E}$ *nicht durch* P *geht und disjunkt zu* $\boldsymbol{E}'$ *und* $\boldsymbol{E}''$ *ist, dann sind die Tangentialhyperebenen von* P *bezüglich* $\mathcal{Q}_1$ *und* $\mathcal{Q}_2$ *gleich, und* $\mathcal{Q}_1$ *und* $\mathcal{Q}_2$ *stimmen in den Punkten der (gemeinsamen) Tangentialhyperebene von* P *überein.*

Satz 0.2 (4.8.8). *Sei* $\mathbb{P}^5(V)$ *ein 5-dimensionaler projektiver Raum der über einem Körper der Ordnung* > 2 *koordinatisiert ist. Dann ist jede KLEINsche quadratische Menge von* $\mathbb{P}^5(V)$ *eine Quadrik.*

Plückereinbettung

In den vorigen Abschnitten haben wir gesehen, wie Geraden eines 3-dimensionalen projektiven Raumes in einen 5-dimensionalen Raum eingebettet werden können. Die sogenenannte Plückereinbettung ist eine Verallgemeinerung dieses Vorgehens.

Definition 0.10. *Sei* K *ein Körper. Die Grassmannsche ist gegeben durch*

$$Gr_l(K^n) := \{U \,|U \subseteq K^n \text{ ist } l\text{-dim linearer Unterraum}\}.$$

Die Plückereinbettung ist durch folgende Abbildungsvorschrift definiert:

Definition 0.11. *Sei* K *ein Körper und* $l \leq n$. *Dann heisst die folgende injektive Abbildung Plückereinbettung:*

$$\Psi : Gr_l(K^n) \to \mathbb{P}(\bigwedge^l K^n)$$
$$span(v_1, \ldots, v_l) \mapsto [v_1 \wedge \ldots \wedge v_l],$$

wobei die v_i *für* $i \in \{1, \ldots, l\}$ *die Basisvektoren eines Elementes aus* $Gr_l(K^n)$ *bezeichnen.*

Die Plückereinbettung bildet folglich Uneterräume einer vorgegebenen Dimension auf das Wedge-Produkt der Basisvektoren, d.h. auf die entsprechende Äquivalenzklasse, ab. Da sich das Wedge-Produkt von zwei verschiedenen Basen desselben Raumes nur um eine multiplikative Konstante unterscheidet, ist die Abbildung wohldefiniert.