# Quotientengeometrien und endliche projektive Räume

Benjamin Gehrig Simon Hasenfratz

ETH Zürich
Mathematik Departement
Seminar über projektive Geometrie

## 1 Quotientengeometrien

In vielen Fällen erweist es sich als ausserordentlich nützlich, eine Geometrie *lokal* zu betrachten; man berücksichtigt dann zum Beispiel nur die Unterräume durch einen festen Punkt. Dies führt zum Begriff der Quotientengeometrie.

**Definition.** Sei $Q$ ein Punkt von $\mathbf{P}$. Die Inzidenzstruktur $\mathbf{P}/Q$, deren *Punkte* die Geraden von $\mathbf{P}$ durch $Q$, deren *Geraden* die Ebenen von $\mathbf{P}$ durch $Q$ sind und deren Inzidenz von $\mathbf{P}$ induziert wird, heisst die **Quotientengeometrie** von $\mathbf{P}$ nach dem Punkt $Q$.

Man kann Quotientengeometrien ebenfalls als projektive Räume auffassen. Hierzu brauchen wir aber zuerst den Begriff des Isomorphismus.

**Definition.** Seien $\mathbf{G} = (\Omega, I)$ und $\mathbf{G}' = (\Omega', I')$ Geometrien vom Rang 2. Seien ferner $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{G}'$ die Menge der Punkte und Geraden von $\mathbf{G}$ bzw. $\mathbf{G}'$. Eine Abbildung $\alpha : \mathfrak{P} \cup \mathfrak{G} \to \mathfrak{P}' \cup \mathfrak{G}'$ heisst **Isomorphismus** von $\mathbf{G}$ nach $\mathbf{G}'$, falls folgendes gilt:

1. $\alpha$ ist bijektiv
2. $\alpha$ bildet $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}'$ ab.
3. Für alle $P \in \mathfrak{P}$ und alle $g \in \mathfrak{G}$ gilt: $PIg \Leftrightarrow \alpha(P)I'\alpha(g)$

Ein Isomorphismus erhält alle inzidenzgeometrischen Eigenschaften von Geometrien. Es lässt sich nun folgendes Resultat zeigen:

**Satz.** Sei $\mathbf{P}$ ein d-dimensionaler projektiver Raum, und sei $Q$ ein Punkt von $\mathbf{P}$. Dann ist die Quotientengeomtrie $\mathbf{P}/Q$ von $\mathbf{P}$ nach $Q$ isomorph zu einem projektiven Raum der Dimension $d-1$.

## 2 Endliche projektive Räume

**Definition.** Ein projektiver Raum $\mathbf{P}$ heisst **endlich**, wenn seine Punktemenge endlich ist.

Folgendes Lemma gilt sogar für allgemeine projektive Räume:

**Lemma.** Seien $g_1$ und $g_2$ zwei Geraden des projektiven Raumes **P**. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $\pi : (g_1) \to (g_2)$ der Menge $(g_1)$ der Punkte von $g_1$ auf die Menge $(g_2)$ der Punkte von $g_2$.

Nach dem Lemma gibt es also für jeden endlichen projektiven Raum **P** eine natürliche Zahl $q$ derart, dass auf jeder Geraden von **P** genau $q + 1$ Punkte liegen. Die so definierte Zahl $q$ heisst die **Ordnung** des projektiven Raumes **P**.

**Lemma.** Sei **P** ein endlicher projektiver Raum der Dimension $d \geq 2$ und der Ordnung $q$. Dann hat die Quotientengeometrie $\mathbf{P}/Q$ für jeden Punkt Q von $P$ ebenfalls die Ordnung $q$.

Man kann nun quantitative Aussagen über die Anzahl Punkte/Geraden/Hyperebenen in einem endlichen projektiven Raum machen:

**Satz.** Sei **P** ein endlicher projektiver Raum der Dimension $d$ und der Ordnung $q$, und sei **U** ein t-dimensionaler Unterraum von **P** $(1 \leq t \leq d)$. Dann gilt:

1. **U** enthält genau $q^t + q^{t-1} + ... + q + 1 = \frac{q^{t+1}-1}{q-1}$ Punkte. Insbesondere hat **P** genau $q^d + ... + q + 1$ Punkte.
2. Die Anzahl der Geraden von **U** durch einen Punkt von **U** ist gleich $q^{t-1} + ... + q + 1$.
3. Die Anzahl aller Geraden von **U** ist gleich

$$\frac{(q^t + q^{t-1} + ... + q + 1) \cdot (q^{t-1} + ... + q + 1)}{q + 1}.$$

Analog findet man:

**Satz.** Sei **P** ein endlicher projektiver Raum der Dimension $d$ und der Ordnung $q$. Dann gilt:

1. **P** enthält genau $q^d + ... + q + 1$ Hyperebenen.
2. Die Anzahl der Hyperebenen von **P** durch einen Punkt von **P** ist gleich $q^{d-1} + ... + q + 1$.

Und daraus folgt nun:

**Korollar.** Sei **P** eine endliche projektive Ebene. Dann gibt es eine natürliche Zahl $q \geq 2$ derart, dass jede Gerade von **P** genau $q + 1$ Punkte hat und **P** insgesamt $q^2 + q + 1$ Punkte besitzt.

Die Frage, welche natürlichen Zahlen $q$ Ordnung einer projektiven Ebene sein können, gehört zu den meistdiskutierten Fragen der endlichen Geometrie.

Hier einige Tatsachen:

| Ordnung q | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Existenz | *ja* | *ja* | *ja* | *ja* | *nein* | *ja* | *ja* | *ja* | *nein* | *ja* | ? |

Weitere herausragende Tatsachen wären:

1. Die Ordnung jeder *bekannten* projektiven Ebene ist eine Primzahlpotenz.

2. Ist $q$ von der Form $q = 4n + 1$ oder $q = 4n + 2$ für ein $n \in N$, und gibt es eine projektive Ebene der Ordnung $q$, so muss $q$ die Summe von zwei Quadratzahlen sein. Deshalb kann es zum Beispiel keine projektiven Ebenen der Ordnung $q = 8n + 6$ geben.

3. Die einzige andere Zahl $q$, die als Ordnung einer projektiven Ebene ausgeschlossen wurde, ist $q = 10$.