Affine Geometrie mit Anwendung auf Kommunikation

Carl Vollenweider, Klaus Widmayer

6. Oktober 2009

1 Affine Geometrie

Definition 1.1 (Affine Geometrie)**.** Sei $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ ein projektiver Raum der Dimension $d \geq 2$ und sei H_∞ eine Hyperebene von $\mathbb{P}$. Definiere

$$\mathcal{P}_A := \{P \in \mathcal{P} : P \text{ liegt nicht in } H_\infty\}, \qquad \mathcal{G}_A := \{g \in \mathcal{G} : g \text{ liegt nicht ganz in } H_\infty\}.$$

Mit der induzierten Inzidenz I_A erhalten wir so eine Rang 2-Geometrie

$$A = \mathbb{P} \backslash H_\infty := (\mathcal{P}_A, \mathcal{G}_A, I_A),$$

den zu $\mathbb{P}$ und H_∞ gehörenden **affinen Raum** der Dimension d. Falls $d = 2$ nennen wir A eine **affine Ebene**.

Weiter sind die t-dimensionalen Unterräume von A definiert als diejenigen t-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{P}$, welche nicht ganz in H_∞ liegen. Die Menge bestehend aus A und all dessen Unterräumen nennen wir die zu A gehörige **affine Geometrie**.

Für $1 \leq t \leq (d-1)$ sei A_t die Rang 2-Geometrie deren Punkte die Punkte von A und deren Geraden die t-dimensionalen Unterräume von A sind, wieder versehen mit der induzierten Inzidenz.

Etwas Terminologie: Die Hyperebene H_∞ heisst die **uneigentliche Hyperebene** von A, deren Punkte heissen **uneigentliche Punkte** von A. Der projektive Raum $\mathbb{P}$ wird **projektiver Abschluss** von A genannt.

Ein wichtiger Begriff im Rahmen der affinen Geometrie ist der folgende:

Definition 1.2 (Parallelismus)**.** Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ eine Rang 2-Geometrie. Eine Äquivalenzrelation $\|$ auf $\mathcal{G}$ heisst **Parallelismus**, falls gilt: Für jeden Punkt $P \in \mathcal{P}$ und jede Gerade $g \in \mathcal{G}$ gibt es genau eine Gerade $h \in \mathcal{G}$ durch P mit $h \parallel g$.

Zwei Geraden $g, h \in \mathcal{G}$ heissen **parallel**, falls $h \parallel g$. Die Äquivalenzklassen von $\|$ nennen wir **Parallelenscharen** bezüglich $\|$.

Der folgende Satz zeigt, dass affine Geometrien auf natürliche Weise einen Parallelismus besitzen.

Satz 1.3. *Sei $t \in \{1, \ldots, d-1\}$. Seien U, W t-dimensionale Unterräume von A. Dann definiert*

$$U \parallel W \quad :\Longleftrightarrow \quad U \cap H_\infty = W \cap H_\infty$$

*einen Parallelismus auf A_t, den sogenannten **natürlichen Parallelismus**.*

Den so gewonnenen Parallelismus erweitern wir wie folgt: Wir nennen zwei Unterräume U, W (beliebiger Dimension) von A parallel, falls der eine parallel zu einem Unterraum des anderen ist.

Lemma 1.4. *Sei $A = \mathbb{P} \backslash H_\infty$. Dann gelten:*

1. *Jede Gerade, die nicht parallel zu einer Hyperebene H von A ist, schneidet H in genau einem Punkt von A.*

2. *Ist $d = 2$, so schneiden sich je zwei nichtparallele Geraden in einem Punkt von A.*

Korollar 1.5. *Jede affine Ebene A erfüllt:*

1. *Durch je zwei Punkte geht genau eine Gerade.*

2. ***(Playfairsches Parallelenaxiom)** Seien g eine Gerade und P ein Punkt mit $P \notin (g)$. Dann gibt es genau eine Gerade h durch P mit $(g) \cap (h) = \emptyset$.*

3. *Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.*

Dies zeigt, dass affine Ebenen unserer Anschauungsebene ähneln. Es gilt auch die Umkehrung obigen Korollars:

Satz 1.6. *Sei $\mathbb{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ eine Geometrie. Falls $\mathbb{S}$ die Bedingungen 1, 2, 3 aus obigem Korollar erfüllt, so ist $\mathbb{S}$ eine affine Ebene.*

Dies zeigt, dass unsere Anschauungsebene in der Tat eine affine Ebene ist.

Definition 1.7. Sei $\mathbb{P}$ ein projektiver Raum der Ordnung q, H eine Hyperebene von $\mathbb{P}$. Dann nennen wir q auch die **Ordnung** des affinen Raums $A := \mathbb{P} \backslash H$.

Satz 1.8. *Sei A ein d-dimensionaler affiner Raum der Ordnung q. Dann gelten:*

1. *Jede Gerade inzidiert mit genau q Punkten.*

2. *Sei U ein t-dimensionaler Unterraum von A, $0 \leq t \leq d$. Dann hat U genau q^t Punkte.*

Korollar 1.9. *Sei A eine affine Ebene endlicher Ordnung. Dann gibt es ein $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ derart, dass auf jeder Geraden genau q Punkte liegen und A insgesamt q^2 Punkte hat.*

Man kann affine Ebenen auch anders charakterisieren als in Satz 1.6:

Satz 1.10. *Sei $\mathbb{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ eine Rang 2-Geometrie mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Je zwei verschiedene Punkte von $\mathbb{S}$ inzidieren mit genau einer gemeinsamen Geraden.*

2. *Es gibt ein $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ derart, dass $\mathbb{S}$ insgesamt genau q^2 Punkte hat.*

3. *Auf jeder Geraden von $\mathbb{S}$ liegen genau q Punkte.*

Dann ist $\mathbb{S}$ eine affine Ebene.

2 Anwendung auf Kommunikation

Betrachte den affinen Raum $A = \mathbb{P} \backslash H_\infty$, wobei $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ ein projektiver Raum der Dimension $d \geq 2$ und Ordnung q, sowie H_∞ eine Hyperebene in $\mathbb{P}$ sind. Sei $\{P_1, ..., P_d\}$ eine Basis für H_∞.

Mit Hilfe des folgenden Algorithmus wollen wir nun eine vollständigen Informationsaustausch zwischen allen q^d Punkten von A durchführen.

Algorithmus. Jeder Punkt von A habe Information, die er weitergeben kann.

- 1. Schritt: Jeder Punkt X sendet seine Information an jeden Punkt von A, der auf der Geraden XP_1 liegt.
- i-ter Schritt ($2 \leq i \leq d$): Jeder Punkt Q von A sendet seine bisher gewonnenen Informationen an all die Punkte von A, welche auf der Geraden QP_i liegen. □

Dieser Informationsaustausch ist effizient im folgenden Sinn:

Satz 2.1. *Nach d Schritten des obigen Algorithmus kennt jeder Punkt von A die gesamte Information. Es werden insgesamt genau $d \cdot (q-1) \cdot q^d$ Transaktionen durchgeführt.*

Bemerkung 2.2. Falls man einen Informationsaustausch zwischen $N \in \mathbb{N}$ Teilnehmern modellieren möchte, wobei sich N nicht als q^d wie oben schreiben lässt, so fügt man dem System zusätzliche Teilnehmer (ohne relevante Informationen) hinzu.