Der projektive Raum $\mathbf{P}(V)$ und die Sätze von Desargues und Pappos

Seminar in projektiver Geometrie

Elke Spindler Rainer Ott

16. Oktober 2009

Sobald man konkrete, geometrische Berechnungen anstellen möchte, braucht man die Werkzeuge und Methoden der analytischen Geometrie. In diesem Sinne betrachen wir auch einen konkreten projektiven Raum. Nämlich der projektive Raum $\mathbf{P}(V)$, welcher mit Hilfe von Vektorräumen gebildet wird.

Definition. Sei V ein Vektorraum über einem Schiefkörper K. Wir definieren die Geometrie $\mathbf{P}(V)$ wie folgt:
Die *Punkte* von $\mathbf{P}(V)$ sind die Unterräume der Dimension 1 von V,
die *Geraden* von $\mathbf{P}(V)$ sind die 2-dimensionalen Unterräume von V,
die *Inzidenz* von $\mathbf{P}(V)$ ist mengentheoretisches Enthaltensein.

Achtung: Im normalen Sprachgebrauch werden die 1-dimensionalen Unterräume eines Vektorraums manchmal Geraden genannt.

Dass die Geometrie $\mathbf{P}(V)$ ein projektiver Raum ist, sagt der folgende

Satz 2.1.1. Sei V ein Vektorraum der Dimension $d+1$ über einem Schiefkörper K. Dann ist $\mathbf{P}(V)$ ein projektiver Raum. Wir nennen $\mathbf{P}(V)$ den über K **koordinatisierten** projektiven Raum. Wenn $d+1 \geq 3$ ist, dann ist $\mathbf{P}(V)$ nicht ausgeartet.

Mit Hilfe des Beweises von Satz 2.1.1 ist leicht einzusehen, dass gilt:

Korollar 2.1.2. Sei $\mathbf{P}(V)$ ein projektiver Raum über dem Vektorraum V:
(a) Seien v, w zwei von 0 verschiedene Vektoren aus V. Dann sind die Vektoren v, w genau dann linear unabhängig, wenn die Punkte $\langle v\rangle, \langle w\rangle$ von $\mathbf{P}(V)$ verschieden sind.
(b) Seien v, w zwei linear unabhängige Vektoren. Dann ist $\langle v, w\rangle$ die Gerade von $\mathbf{P}(V)$ durch die Punkte $\langle v\rangle, \langle w\rangle$ von $\mathbf{P}(V)$.

Einen Zusammenhang zwischen der Dimension des Vektorraums und der des projektiven Raums $\mathbf{P}(V)$ gibt das

Korollar 2.1.4. Hat V die Dimension $d+1$, dann besitzt der projektive Raum $\mathbf{P}(V)$ die Dimension d.

Für den Beweis von Korollar 2.1.4 brauchen wir folgendes

Lemma 2.1.3. (a) Sei V' ein Unterraum des Vektorraums V. Dann ist $\mathbf{P}(V')$ ein Unterraum von $\mathbf{P}(V)$.
(b) Sei U ein Unterraum von $\mathbf{P}(V)$. Dann existiert genau ein Untervektorraum V' von V mit $\mathbf{P}(V') = U$.

Es wird nun gezeigt, dass die zwei wichtigen Schliessungssätze von Desargues und Pappos im projektiven Raum $\mathbf{P}(V)$ gelten.

Definition. Sei $\mathbf{P}$ ein projektiver Raum. Wir sagen, dass in $\mathbf{P}$ der **Satz von Desargues** gilt, falls folgendes richtig ist: Für jede Auswahl von Punkten $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ mit folgenden Eigenschaften

- A_i, B_i sind kollinear mit einem Punkt $Z, Z \neq A_i \neq B_i \neq Z$ $(i = 1, 2, 3)$,
- keine drei der Punkte Z, A_1, A_2, A_3 und keine drei der Punkte Z, B_1, B_2, B_3 sind kollinear,

gilt, dass die Punkte

$$P_{12} := A_1B_2 \cap B_1B_2, \qquad P_{23} := A_2A_3 \cap B_2B_3, \qquad P_{31} := A_3A_1 \cap B_3B_1$$

auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Satz 2.2.1. Sei V ein Vektorraum der Dimension $d+1$ über einem Schiefkörper K. Dann gilt in $\mathbf{P}(V)$ der Satz von Desargues.

Definition. Sei $\mathbf{P}$ ein projektiver Raum. Wir sagen, dass in $\mathbf{P}$ der **Satz von Pappos** gilt, falls für je zwei sich schneidende Geraden g und h mit $g \neq h$ gilt: Für A_1, A_2, A_3 verschiedene Punkte von g, und B_1, B_2, B_3 verschiedene Punkte von h mit $A_i \neq g \cap h \neq B_i$ $(i = 1, 2, 3)$, folgt:
Die Punkte

$$Q_{12} := A_1B_2 \cap B_1A_2, \qquad Q_{23} := A_2B_3 \cap B_2A_3, \qquad Q_{31} := A_3B_1 \cap B_3A_1$$

liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

Bemerkung: Im Satz von Pappos befindet man sich immer in der von g und h aufgespannten Ebene.

Satz 2.2.2 (Hilbert). Sei V ein Vektorraum über dem Schiefkörper K. Dann gilt in $\mathbf{P}(V)$ der Satz von Pappos genau dann, wenn K kommutativ ist.

Der Satz von Pappos ist stärker als der Satz von Desargues. Dies zeigt folgender

Satz 2.2.3 (Hessenberg). Sei $\mathbf{P}$ ein beliebiger projektiver Raum. Gilt in $\mathbf{P}$ der Satz von Pappos, so gilt auch der Satz von Desargues.