Homogene und inhomogene Koordinaten und das Hyperpoloid

Benjamin Miesch Benjamin Stucky

23. Oktober 2009

1 Homogene und inhomogene Koordinaten

Definition. Wir wählen eine Basis $\{\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_d\}$ von V fest. Dann kann man jeden Vektor

$$\mathrm{v} = k_0\mathrm{v}_0 + k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_d\mathrm{v}_d \in \mathrm{V}$$

eindeutig durch seine *Koordinaten* $(k_0, k_1, \ldots, k_d)$ darstellen.
Wir sagen, ein Punkt $\langle \mathrm{v} \rangle$ von $\mathbf{P}(\mathrm{V})$ hat *homogene Koordinaten* $(k_0, k_1, \ldots, k_d)$, falls

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \langle k_0\mathrm{v}_0 + k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_d\mathrm{v}_d \rangle$$

Diese sind jedoch nur bis auf Multiplikation mit $\lambda \in K\backslash\{0\}$ eindeutig. Wir schreiben P=$(k_0 : k_1 : \ldots : k_d)$, falls P $= \langle k_0\mathrm{v}_0 + k_1\mathrm{v}_1 + \ldots + k_d\mathrm{v}_d \rangle$.

Satz. Seien $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_t$ Punkte mit homogenen Koordinaten

$$P_i = (k_{i0} : k_{i1} : \ldots : k_{id}) \quad i = 1, \ldots, t$$

Dann gilt: Genau dann sind $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_t$ unabhängig, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} k_{10} & k_{11} & \ldots & k_{1d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{t0} & k_{t1} & \ldots & k_{td} \end{pmatrix}$$

den Rang t hat.

Korollar. Drei Punkte $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ liegen genau dann auf einer Geraden, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} k_{10} & k_{11} & \ldots & k_{1d} \\ k_{20} & k_{21} & \ldots & k_{2d} \\ k_{30} & k_{31} & \ldots & k_{3d} \end{pmatrix}$$

vom Rang $\leqslant 2$ ist.

Satz. Sei V ein Vektorraum der Dimension d+1 über dem Schiefkörper K, und sei $\mathbf{P}(\mathrm{V})$ der zugehörige projektive Raum. Sei $\mathbf{H}$ eine Hyperebene von $\mathbf{P}(\mathrm{V})$. Dann sind die homogenen Koordinaten der Punkte von $\mathbf{H}$ die Lösung einer homogenen Gleichung mit Koeffizienten aus K. Umgekehrt beschreibt jede homogene lineare Gleichung ungleich der Nullgleichung eine Hyperebene von $\mathbf{P}(\mathrm{V})$.

Definition. Sei $k_0x_0 + k_1x_1 + \ldots + k_dx_d = 0$ die homogene Gleichung, die die Hyperebene **H** beschreibt. Dann sagen wir, dass **H** die *homogenen Koordinaten* $[k_0 : k_1 : \ldots : k_d]$ hat.

Korollar. Jeder t-dimensionale Unterraum **U** eines durch homogene Koordinaten beschriebenen projektiven Raumes der Dimension d lässt sich durch ein homogenes System von d-t Gleichungen beschreiben.

Satz. Sei $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathrm{V})$ ein projektiver Raum, dessen Punkte durch homogene Koordinaten $(k_0 : k_1 : \ldots : k_d)$ dargestellt sind. Dann kann einerseits jede Hyperebene von $\mathbf{P}(\mathrm{V})$ durch ein (d+1)-Tupel $[h_0 : h_1 : \ldots : h_d]$ dargestellt und andererseits jedem solchen (d+1)-Tupel eine Hyperebene zugeordnet werden. Ferner gilt:

$$(k_0 : k_1 : \ldots : k_d)\mathrm{I}[h_0 : h_1 : \ldots : h_d] \Leftrightarrow k_0x_0 + k_1x_1 + \ldots + k_dx_d = 0.$$

Wir betrachten nun die zu einem projektiven Raum **P** duale Geometrie $\mathbf{P}^{\Delta}$. Dabei betrachten wir **P** als die Rang 2-Geometrie, die aus den Punkten und Hyperebenen besteht.

Korollar. Sei $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathrm{V})$ ein koordinatisierter projektiver Raum. Dann ist $\mathbf{P}^{\Delta} \cong \mathbf{P}$. Insbesondere ist $\mathbf{P}^{\Delta}$ ebenfalls koordinatisiert. Also gilt das Dualitätsprinzip auch für die Klasse aller koordinatisierten projektiven Räume einer festen Dimension d.

Satz. Sei $\mathbf{H}_\infty$ die Hyperebene von $\mathbf{P}(\mathrm{V})$ mit der Gleichung $x_0 = 0$. Dann lässt sich der affine Raum $\mathbf{A} = \mathbf{P} \setminus \mathbf{H}_\infty$ wie folgt beschreiben:

- Die Punkte von **A** sind die Vektoren $(k_1, \ldots, k_d)$ der d-dimensionalen Vektorraums K^d;
- die Geraden von **A** sind die Nebenklassen der 1-dimensionalen Unterräume von K^d;
- die Inzidenz ist mengentheoretisches Enthaltensein.

Definition. Hat der Punkt P in **A** die homogenen Koordinaten $(1 : k_1 : \ldots : k_d)$, so nennt man $(k_1, \ldots, k_d)$ die *inhomogenen Koordinaten* des Punktes P in **A**.

2 Das Hyperboloid

Definition. Sei **P** ein projektiver Raum.

(a) Wir nennen eine Menge $\mathfrak{M}$ von Unterräumen von **P** *windschief*, wenn je zwei Unterräume aus $\mathfrak{M}$ keinen Punkt gemeinsam haben. Wir sprechen in einem solchen Fall auch von *windschiefen Unterräumen.*

(b) Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von windschiefen Unterräumen. Eine Gerade heisst eine *Transversale* von $\mathfrak{M}$, wenn sie jeden Unterraum aus $\mathfrak{M}$ in genau einem Punkt trifft.

Lemma. Sei **P** ein projektiver Raum. Seien g_1 und g_2 windschiefe Geraden, und sei P ein Punkt ausserhalb g_1 und g_2. Dann gibt es höchstens eine Transversale von g_1 und g_2 durch P. Falls **P** 3-dimensional ist, gibt es genau eine Transversale von g_1 und g_2 durch P.

Satz (16 Punkte-Satz). Sei **P** ein 3-dimensionaler projektiver Raum über dem Schiefkörper K. Seien $\{\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3\}$ und $\{\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \mathrm{h}_3\}$ Mengen von je drei windschiefen Geraden derart, dass jede Gerade g_i jede Gerade h_j schneidet. Dann gilt: Genau dann schneidet jede Transversale $\mathrm{g} \notin \{\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3\}$ von $\{\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \mathrm{h}_3\}$ jede Transversale $\mathrm{h} \notin \{\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \mathrm{h}_3\}$ von $\{\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3\}$, wenn K kommutativ (also ein Körper) ist.

Satz von Ceva. Seinen P=$\langle \mathrm{u} \rangle$, Q=$\langle \mathrm{v} \rangle$, R=$\langle \mathrm{w} \rangle$ drei nichtkollineare Punkte einer projektiven Ebene **P**(V). Sei P'=$\langle \mathrm{v}+a\mathrm{w} \rangle$ ein Punkt auf QR, Q'=$\langle \mathrm{w}+b\mathrm{u} \rangle$ ein Punkt auf RP und R'=$\langle \mathrm{u}+c\mathrm{v} \rangle$ ein Punkt auf PQ. Dann gilt: Die Geraden PP', QQ', RR' gehen genau dann durch einen gemeinsamen Punkt, wenn $abc = 1$.

Definition. Sei **P** ein 3-dimensionaler projektiver Raum. Eine Menge $\mathfrak{R}$ von windschiefen Geraden von **P** heisst ein *Regulus (Regelfläche)*, falls folgendes gilt:

- Durch jeden Punkt einer Geraden aus $\mathfrak{R}$ geht eine Transversale von $\mathfrak{R}$.
- Durch jeden Punkt einer Transversalen von $\mathfrak{R}$ geht eine Gerade von $\mathfrak{R}$.

Es ist klar, dass die Transversalen von $\mathfrak{R}$ paarweise windschief sind und dass die Menge $\mathfrak{R}'$ aller Transversalen eines Regulus $\mathfrak{R}$ wieder einen Regulus bilden. Wir nennen ihn den *entgegengesetzten Regulus* von $\mathfrak{R}$.

Satz. Sei **P** ein 3-dimensionaler projektiver Raum über dem Schiefkörper K. Seien g_1, g_2, g_3 drei windschiefe Geraden von **P**. Dann gilt:

(a) Es gibt höchstens einen Regulus, der g_1, g_2 und g_3 enthält.

(b) Wenn K nichtkommutativ ist, so gibt es keinen Regulus in **P**.

(c) Wenn K kommutativ ist, so gibt es genau einen Regulus durch g_1, g_2, g_3.

Satz. Sei **P** ein 3-dimensionaler projektiver Raum über dem Körper K, der durch homogene Koordinaten dargestellt ist. Dann sind

$$\begin{aligned} \mathrm{g}_1 &= \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle, \\ \mathrm{g}_2 &= \langle (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle, \\ \mathrm{g}_3 &= \langle (1,0,1,0), (0,1,0,1) \rangle, \end{aligned}$$

drei windschiefe Geraden. Die Menge $\mathcal{Q}$ der Punkte auf dem eindeutig bestimmten Regulus $\mathfrak{R}$ durch g_1, g_2, g_3 lässt sich beschreiben als

$$\mathcal{Q} = \{(k_0 : k_1 : k_2 : k_3) \mid k_0 k_3 = k_1 k_2 \text{ mit } k_i \in \mathrm{K}, \text{ nicht alle } k_i = 0\}.$$

Die Koordinaten der Punkte aus $\mathcal{Q}$ genügen also der quadratischen Gleichung

$$x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0.$$

Definition. Man nennt $\mathcal{Q}$ die *hyperbolische Quadrik* (oder das *Hyperboloid*) des 3-dimensionalen projektiven Raums **P**.