Rationale Normkurven, die Moulton-Ebene und der Satz von Desargues im Raum

Seminar über projektive Geometrie

Matteo Willi, Samuel Trautwein

30.10.2009

1 Rationale Normkurven

In diesem Abschnitt geht es darum möglichst grosse Mengen von Punkten zu konstruieren, die so unabhängig wie möglich ("in allgemeiner Lage") sind. Anwendungen davon findet man in der Codierungstheorie und in der Kryptologie.

Definition 1. *Sei $\boldsymbol{P}$ ein projektiver Raum der Dimension d. Man sagt, dass eine Menge $\mathcal{M}$ von mindestens $d+1$ Punkten von $\boldsymbol{P}$* in allgemeiner Lage *ist, wenn je $d+1$ Punkte von $\mathcal{M}$ unabhängig sind, d.h. eine Basis von $\boldsymbol{P}$ bilden.*

Beispiele:

1. Betrachte eine *projektive Ebene*. $\mathcal{M}$ ist in allgemeiner Lage, falls keine drei Punkte von $\mathcal{M}$ auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
2. Betrachte einen *3-dim. projektiven Raum*. $\mathcal{M}$ ist in allgemeiner Lage, falls keine vier Punkte von $\mathcal{M}$ in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Wir suchen nach grossen Mengen von Punkten, die in allgemeiner Lage sind. Kandidaten dafür sind zum Beispiel die "rationalen Normkurven".

Definition 2. *Sei $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(V)$ ein über dem Körper K koordinatisierter projektiver Raum der Dimension d. Die Punktmenge*

$$C := \{(1 : t : t^2 : \ldots : t^d) | t \in K\} \cup \{(0 : \ldots : 0 : 1)\}$$

heisst rationale Normkurve *von $\boldsymbol{P}$.*

Beispiel: In der Ebene besteht eine rationale Normkurve aus den Punkten $(1 : t : t^2)$ für $t \in K$ und dem Punkt $(0 : 0 : 1)$. Wenn man die affine Ebene $\mathbf{A} = \mathbf{P} \setminus g_\infty$ betrachtet, wobei g_∞ die Gerade mit Gleichung $x_0 = 0$ ist, können die *affinen Punkte* der rationalen Normkurve durch (x_1, x_2) mit $x_2 = x_1^2$ beschrieben werden. Es handelt sich um eine Parabel in der affinen Ebene.

Der folgende Satz sagt uns, dass die rationalen Normkurven das sind, was wir suchen.

Satz 1. *Die Punkte einer rationalen Normkurve sind in allgemeiner Lage.*

2 Die Moulton-Ebene

Aus dem Satz 2.2.1 weiss man schon, dass der Satz von Desargues gilt in einem über dem Schiefkörper K koordinatisierten projektiven Raum $\mathbf{P}(V)$ der Dimension d. Hier will man eine affine Ebene konstruieren, in der dieser Satz i.a. *nicht* gilt. Aus der Existenz einer solchen Konstruktion und aus dem Satz 2.2.1 kann man schliessen, dass nicht jede affine (und damit nicht jede projektive) Ebene von der Form $\mathbf{P}(V)$ sein kann. Wir konstruieren die sogenannte *Moulton-Ebene* aus der euklidischen reellen Ebene (d.h. aus der affinen Ebene über den reellen Zahlen). Die Grundidee ist die folgende: alle Geraden mit negativer Steigung werden an der y-Achse um den Faktor 2 geknickt.

Definition 3. *Man definiert die Geometrie M wie folgt:*

- Punkte: *alle Paare (x, y) mit $x, y \in \mathbb{R}$.*
- Geraden: *die Geraden, die durch die Gleichungen $x = c$ und $y = mx + b$ für $m, b, c \in \mathbb{R}$ gegeben sind.*
- Inzidenz: *Seien $P := (x_0, y_0)$, g ein Punkt bzw. eine Gerade der Moulton-Ebene.*
  1. Fall: *g ist durch $x = c$ beschrieben. Dann: $PIg \Leftrightarrow x_0 = c$.*
  2. Fall: *g ist durch $y = mx + b$ beschrieben. Dann:*
  Falls $x_0 \leq 0$ oder $m \geq 0$: $PIg \Leftrightarrow y_0 = mx_0 + b$.
  Falls $x_0 > 0$ und $m < 0$: $PIg \Leftrightarrow y_0 = 2mx_0 + b$.

Die so definierte Geometrie M heisst Moulton-Ebene *(1902).*

Satz 2. *Die Moulton-Ebene ist eine affine Ebene, in der der Satz von Desargues* nicht *allgemein gilt.*

Bemerkungen:

- (Aufgabe 21) Bei der Konstruktion der Moulton-Ebene werden nicht alle Geraden an der y-Achse geknickt, da der Beweis vom vorherigen Satz sonst erfolglos wäre: In der Moulton-Ebene wären die Schnittpunkte $P_{12}^M, P_{23}^M, P_{31}^M$ kollinear, genauso wie P_{12}, P_{23}, P_{31} in der reellen Ebene (Beachte, dass in unserem Beweis i.a. $P_{ij}^M \neq P_{ij}$ gilt).
- Man kann anstelle des Faktors 2 in der Definition der Moulton-Ebene jeden anderen Wert verschieden von 1 wählen, um eine nichtdesarguessche affine Ebene zu erhalten.

3 Räumliche Geometrien sind desarguessch

Satz 3. *Sei* $\boldsymbol{P}$ *ein projektiver Raum der Dimension* d*. Wenn* $d \geq 3$ *ist, dann gilt in* $\boldsymbol{P}$ *der Satz von Desargues.*

Bemerkung: Aus dem Satz 2.2.1 und aus dem Satz 2 dieses Vortrags weiss man schon, dass der Satz von Desargues in projektiven Räumen der Form $\mathbf{P}(V)$ gilt, nicht aber in allen projektiven Räumen $\mathbf{P}$. Hier wird bewiesen, dass der Satz in allgemeinen Räumen $\mathbf{P}$ ab Dimension 3 gilt.

Folge: Es gibt keine "räumliche Moulton-Geometrie".

Korollar 1. *Sei* $\boldsymbol{P}$ *eine projektive Ebene. Dann gilt in* $\boldsymbol{P}$ *der Satz von Desargues, falls* $\boldsymbol{P}$ *in einen mindestens 3-dimensionalen projektiven Raum als Ebene einbettbar ist.*

Bemerkung: Es gilt auch die Umkehrung (siehe nächstes Kapitel). Die desarguesschen projektiven Ebenen sind also genau die projektiven Ebenen, die Ebenen in einem höherdimensionalen projektiven Raum sind.