Zentralkollineationen

Daria Schwander Thomas Brütsch

ETH Zürich
Seminar über Projektive Geometrie
06.11.2009

Im Kapitel 3 des Buches *Projektive Geometrie* wird gezeigt, dass projektive Räume genau dann von der Form **P**(V) für einen Vektorraum V sind, wenn **P** desarguessch ist. Ein möglicher zugrundeliegender Schiefkörper dieses Vektorraumes wird sich aus Kollineationen von **P** zusammensetzen. Das Ziel unseres Abschnittes ist es, die Existenz solcher Kollineationen zu beweisen.

Sei stets **P** ein projektiver Raum der Dimension d$\geq$ 2.

Lemma 1 Sei α eine Kollineation von **P**. Dann gilt für je zwei verschiedene Punkte X, Y von **P**

$$\alpha(XY) = \alpha(X)\alpha(Y)$$

Definition Eine Kollineation α von **P** heisst *Zentralkollineation*, falls es eine Hyperebene **H** (Achse von α) und einen Punkt Z (Zentrum von α) gibt, mit folgenden Eigenschaften:
- Jeder Punkt X von **H** ist ein Fixpunkt von α;
- Jede Gerade g durch Z ist eine Fixgerade von α.

Beispiel: Geraden- und Punktspiegelung als Zentralkollineationen der affinen Ebene.

Lemma 2 Sei **H** eine Hyperebene und Z ein Punkt von **P**. Dann ist die Menge der Zentralkollineationen mit Achse **H** und Zentrum Z bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe.

Lemma 3 Sei α eine Zentralkollineation von **P** mit Achse **H** und Zentrum Z. Sei P ein Punkt $\neq$ Z, der nicht auf **H** liegt, und sei P' = α(P) das Bild von P. Dann ist α eindeutig bestimmt. Insbesondere gilt für das Bild eines jeden Punktes X, der weder auf **H** noch auf PP' liegt

$$\alpha(X) = ZX \cap FP',$$

wobei F=PX $\cap$ **H**.

Korollar (Eindeutigkeit von Zentralkollineationen) Sei α eine Zentralkollineation von **P** mit Achse **H** und Zentrum Z. Wenn α nicht die Identität ist, so gilt:
(a) Ist P ein Punkt $\neq$ Z, der nicht auf **H** liegt, so ist P kein Fixpunkt von α.
(b) Die Zentralkollineation α ist durch Vorgabe eines Urbild-Bildpaares (P,α(P)) mit P $\neq \alpha$(P) eindeutig bestimmt.
(c) Achse und Zentrum einer Zentralkollineation $\alpha \neq$ id von **P** sind eindeutig bestimmt.

Lemma 4 Sei **P** ein projektiver Raum und sei $\alpha \neq$ id eine Zentralkollineation mit Zentrum Z und Achse **H**. Sei **U** ein Unterraum von **P** mit Z $\in$ **U**, aber **U** ist nicht in **H** enthalten. Dann ist die Einschränkung von α auf **U** eine nichtidentische Zentralkollineation.

Lemma 5 Sei g_0 eine Gerade von **P**. Wir betrachten diejenige Rang 2-Geometrie **P'**, die aus den Punkten von **P**, die nicht auf g_0 liegen und den von g_0 verschiedenen Geraden von **P** besteht.
Sei α eine Kollineation von **P'**. Dann kann α auf eindeutige Weise zu einer Kollineation α^* von **P** ergänzt werden. Diese Kollineation α^* lässt die Gerade g_0 fest.

Mithilfe dieser Lemmata können wir nun den Hauptsatz dieses Abschnittes folgern.

Satz von BAER (Existenz von Zentralkollineationen, 1946) Wenn in **P** der Satz von Desargues gilt, dann gilt: Ist **H** eine Hyperebene und sind Z,P,P' verschiedene kollineare Punkte von **P** mit P,P' $\notin$ **H**, so gibt es genau eine Zentralkollineation von **P** mit Achse **H** und Zentrum Z, die P auf P' abbildet.

Bemerkung: Die Eindeutigkeit folgt aus Korollar (b). Daher genügt es, die Existenz zu zeigen.

Zur Vervollständigung des Beweises des Satzes von BAER benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 6 Sei α eine Kollineation von **P**, zu der es eine Hyperebene **H** derart gibt, dass jeder Punkt von **H** ein Fixpunkt von α ist. Dann gibt es einen Punkt Z von **P**, so dass α mit Achse **H** und Zentrum Z eine Zentralkollineation von **P** ist.

Als einfache Anwendung des Satzes von BAER können wir die Umkehrung von Lemma 4 formulieren.

Satz Sei **P** ein desarguesscher projektiver Raum der Dimension d$\geq$2. Dann wird jede Zentralkollineation α^* eines Unterraums **U** von **P** von einer Zentralkollineation von **P** induziert.