Die Gruppe der Translationen und der Schiefkörper

Lisa Borsi Manuel Cavegn

13. November 2009

Sei $\mathbf{P}$ stets ein projektiver Raum der Dimension $d \geq 2$. Ausser für Satz 1, setzen wir voraus, dass P desarguessch ist.

Die Gruppe der Translationen

Satz 1. *Sei α eine Kollineation des affinen Raumes $\mathbf{A} = \mathbf{P} \setminus \mathbf{H}$. Falls die Ordnung von $\mathbf{P}$ grösser als 2 ist, dann $\exists!$ Kollineation α^* von $\mathbf{P}$ s.d. $\alpha^* |_{\mathbf{A}} = \alpha$.*

Def. $\mathrm{T}(\mathbf{H}) := \{\alpha \mid \alpha$ Zentralkollineation mit Achse $\mathbf{H}$ und Zentrum $\mathrm{Z} \in \mathbf{H}\}$

Satz 2. *$\mathrm{T}(\mathbf{H})$ ist eine abelsche Gruppe, die scharf transitiv auf den Punkten von $\mathbf{A}$ operiert. (Zu je zwei Punkten $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbf{A}$ gibt es genau ein $\alpha \in \mathrm{T}(\mathbf{H})$ mit $\alpha(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$.)*
Weiter gilt: $\alpha \in \mathrm{T}(\mathbf{H}), \alpha \neq id \Longrightarrow \alpha(\mathrm{P}) \neq \mathrm{P}, \forall \mathrm{P} \in \mathbf{A}$.

Def. Wir halten O aus $\mathbf{A} = \mathbf{P} \setminus \mathbf{H}$ fest. Dann ist τ_{P} die (eindeutig bestimmte) Translation, die O auf P abbildet. (Diese Abbildung existiert wegen dem letzten Satz.)
Somit können wir ab jetzt mit den Punkten von $\mathbf{A}$ „rechnen“ und definieren:

$$\mathrm{P} + \mathrm{Q} := \tau_{\mathrm{P}}(\mathrm{Q}) = \tau_{\mathrm{P}}(\tau_{\mathrm{Q}}(\mathrm{O}))$$

Satz 3. *Die Menge $\mathcal{P}^*$ der Punkte des affinen Raumes $\mathbf{A} = \mathbf{P} \setminus \mathbf{H}$ ist mit der oben definierten Verknüpfung $+$ eine Gruppe und isomorph zu $(\mathrm{T}(\mathbf{H}), \circ)$.*

Bemerkung. Für jeden P gibt es einen „negativen“ $-\mathrm{P}$. Das ist der Punkt $\tau_{\mathrm{P}^{-1}}(\mathrm{O})$ und $-\mathrm{P} \in \mathrm{OP}$. Es gilt also: $\mathrm{P} + (-\mathrm{P}) = \mathrm{O}$. Weiter gilt auch: $\tau_{\mathrm{P}+\mathrm{Q}} = \tau_{\mathrm{P}}\tau_{\mathrm{Q}}$.

Def. Wir halten O fest. Dann sei, für $\mathrm{Z} \in \mathbf{H}$, $\mathrm{T}(\mathrm{Z}, \mathbf{H})$ die Menge der Zentralkollineationen mit Achse $\mathbf{H}$ und Zentrum Z.

Bemerkung. $\mathrm{T}(\mathrm{Z}, \mathbf{H})$ ist eine abelsche Untergruppe von $\mathrm{T}(\mathbf{H})$. Wir identifizieren die Elemente von $\mathrm{T}(\mathrm{Z}, \mathbf{H})$ mit den Punkten von $\mathbf{A}$ der Geraden OZ, d.h. die Geraden durch O entsprechen eindeutig den Untergruppen $\mathrm{T}(\mathrm{Z}, \mathbf{H})$ von $\mathrm{T}(\mathbf{H})$.

Def. Sei g eine Gerade von $\mathbf{A}$. Dann setzen wir

$$\mathrm{T}(g) := \{\tau_{\mathrm{P}} \mid \mathrm{P} \ \mathrm{I} \ g\}$$

Satz 4.

- *Die Punkte von $\mathbf{A}$ bilden eine abelsche Gruppe, die wir mit T bezeichnen.*
- *Die Geraden durch O sind gewisse Untergruppen von T. Präziser formuliert: Ist g eine Gerade durch O, so ist $\mathrm{T}(g) = \mathrm{T}(\mathrm{Z}, \mathbf{H})$, wobei Z der uneigentliche Punkt von g ist.*

  Umgekehrt gibt es zu jeder Untergruppe der Form $\mathrm{T}(\mathrm{Z}, \mathbf{H})$ von $\mathrm{T}(\mathbf{H})$ eine Gerade g durch O mit $\mathrm{T}(g) = \mathrm{T}(\mathrm{Z}, \mathbf{H})$.

- *Die anderen Geraden sind die Nebenklassen nach diesen Untergruppen. Wieder präziser: Ist g eine Gerade, die nicht durch* O *geht, so ist*

$$\mathrm{T}(g) = \tau_{\mathrm{P}} \circ \mathrm{T}(\mathrm{Z}, \mathbf{H}),$$

  wobei P *ein beliebiger Punkt von* $\mathbf{A}$ *auf g und* Z *der uneigentliche Punkt von g ist.*

  Umgekehrt gilt wieder: Für alle P *und alle uneigentlichen Punkte* Z *gibt es eine Gerade g mit*

$$\mathrm{T}(g) = \tau_{\mathrm{P}} \circ \mathrm{T}(\mathrm{Z}, \mathbf{H}).$$

Notation. Wir schreiben auch $g = \mathrm{P} + \mathrm{OZ}$, wobei P auf g liegt und Z der Schnittpunkt von g mit $\mathbf{H}$ ist.

Der Schiefkörper

Ziel: Aus einem projektiven oder affinen Raum einen Körper konstruieren, mit dessen Hilfe dann die Geometrie koordinatisiert werden kann. (siehe Satz 5 & 6)

Def. Sei D_{O} die Menge aller Zentralkollineationen eines projektiven Raumes $\mathbf{P}$ mit Achse $\mathbf{H}$ und Zentrum O. Die Elemente von D_{O} werden auch *Dilatationen* mit Zentrum O genannt. (Achtung: Wir betrachten jetzt Homologien, d.h. $\mathrm{O} \notin \mathbf{H}$)

Bemerkung. Der *Satz von Baer* impliziert sofort, dass D_{O} eine Gruppe ist. Sie operiert scharf transitiv auf den von O verschiedenen Punkten einer jeder Geraden durch O von $\mathbf{P} \setminus \mathbf{H}$. Die Gerade $g = \mathrm{P} + \mathrm{OZ}$ wird von $\sigma \in \mathrm{D}_{\mathrm{O}}$ auf $\sigma(g) = \sigma(\mathrm{P}) + \mathrm{OZ}$ abgebildet, da O und Z unter σ festbleiben.

Lemma. *Sei*

$$\mu : \ \mathcal{P}^* \to \mathcal{P}^*, \quad \mathrm{X} \mapsto f(\mathrm{X}) := -\mathrm{X} = \tau_{\mathrm{X}^{-1}}(\mathrm{O}).$$

Dann ist μ eine Kollineation, deren projektive Fortsetzung ein Element von D_{O} *ist.*

Lemma. *Sei* $\sigma \in \mathrm{D}_{\mathrm{O}}$. *Dann ist σ ein Automorphismus von* $(\mathcal{P}^*, +)$ *und es gilt weiter* $\sigma \circ \mu = \mu \circ \sigma$, *also* $\sigma(-\mathrm{X}) = -\sigma(\mathrm{X})$, $\forall \mathrm{X} \in \mathcal{P}^*$ *und* $\forall \sigma \in \mathrm{D}_{\mathrm{O}}$.

Hauptlemma. *Seien* $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{D}_{\mathrm{O}}$. *Definiere*

$$\sigma_1 + \sigma_2 : \ \mathcal{P}^* \to \mathcal{P}^*, \quad \mathrm{X} \mapsto (\sigma_1 + \sigma_2)(\mathrm{X}) := \sigma_1(\mathrm{X}) + \sigma_2(\mathrm{X}).$$

Dann ist entweder $\sigma_1 + \sigma_2$ *die Nullabbildung oder die projektive Fortsetzung von* $\sigma_1 + \sigma_2$ *ist in* D_{O}.

Satz 5. *Sei* 0 *die Nullabbildung auf* $\mathcal{P}^*$. *Wir definieren auf* $\mathrm{K} = \mathrm{D}_{\mathrm{O}} \cup \{0\}$ *die Addition wie im vorangegangenen Hauptlemma. Weiter definieren wir eine Multiplikation:*

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 := \begin{cases} \sigma_1 \circ \sigma_2, & \textit{falls } \sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{D}_{\mathrm{O}}, \\ 0, & \textit{falls } \sigma_1 = 0 \textit{ oder } \sigma_2 = 0. \end{cases}$$

Dann ist $(\mathrm{K}, +, \cdot)$ *ein Schiefkörper.*

Satz 6. *Wir definieren auf* $\mathcal{P}^*$ *eine Skalarmultiplikation wie folgt:*

$$\sigma \cdot \mathrm{X} := \sigma(\mathrm{X}) \textit{ für } \sigma \in \mathrm{K}, \mathrm{X} \in \mathcal{P}^*.$$

Dann ist $\mathcal{P}^*$ *ein* K*-Vektorraum.*