Die Struktursätze

Raffael Hagger, Mario Huber

20.11.2009

Die ersten Struktursätze

3.4.1 Erster Struktursatz für affine Räume. Sei $\mathbf{A} = \mathbf{P}/\mathbf{H}$ ein affiner Raum. Wenn in $\mathbf{A}$ der Satz von Desargues gilt, so gibt es einen Schiefkörper K und einen K-Vektorraum V^*, so dass gilt:

- Die Punkte von $\mathbf{A}$ sind die Vektoren aus V^*;
- Die Geraden von $\mathbf{A}$ sind die Nebenklassen der 1-dimensionalen K-Unterräume von V^*.

3.4.2 Erster Struktursatz für projektive Räume. Zu jedem Desarguesschen projektiven Raum $\mathbf{P}$ der Dimension mindestens 2 gibt es einen Schiefkörper K und einen K-Vektorraum V derart, dass $\mathbf{P}$ isomorph zu $\mathbf{P}(V)$ ist.

3.4.3 Korollar. Wenn $\dim(\mathbf{P}) \geq 3$ ist, dann ist $\mathbf{P} = \mathbf{P}(V)$.

3.4.4 Korollar. Die Ordnung eines endlichen projektiven Raums $\mathbf{P}$, dessen Dimension mindestens 3 ist, ist eine Primzahlpotenz.

Die zweiten Struktursätze

Sei $\mathbf{A} = \mathbf{P}/\mathbf{H}$ ein affiner Raum der Dimension mindestens 2, in dem der Satz von Desargues gilt, und sei:

- O ein fester Punkt von $\mathbf{A}$,
- T die Gruppe der Translationen von $\mathbf{A}$,
- Γ die Menge aller Kollineationen von $\mathbf{A}$ und
- $\Gamma_O \subset \Gamma$ die Untermenge der Kollineationen die O festlassen.

3.5.1 Lemma.

(a) $(\Gamma, \circ)$ ist eine Gruppe.
(b) Γ_O ist eine Untergruppe.
(c) T ist ein Normalteiler von Γ.
(d) Man kann jedes $\alpha \in \Gamma$ so zerlegen: $\alpha = \tau\sigma$ mit $\tau \in T$ und $\sigma \in \Gamma_O$.

3.5.2 Lemma. Seien $\tau \in T$, $P \in \mathbf{A}$ beliebig und setze $P' := \tau(P)$. Dann ist

$$\tau(X) = X + P' - P \quad \forall X \in \mathbf{A}.$$

Definition Sei V ein K-Vektorraum, und sei λ ein Automorphismus des Schiefkörpers K. Eine Abbildung $\gamma : V \to V$ heisst *semilineare Abbildung* mit *begleitendem Automorphismus* λ, falls

$$\gamma(v + w) = \gamma(v) + \gamma(w) \quad \forall v, w \in V \quad \text{und}$$
$$\gamma(\nu v) = \lambda(\nu)\gamma(v) \quad \forall v \in V,\ \nu \in K.$$

3.5.3 Lemma. Sei γ eine bijektive semilineare Selbstabbildung von V.

(a) γ kann als Kollineation von $\mathbf{A} = \mathbf{A}(V)$ aufgefasst werden und es gilt $\gamma \in \Gamma_O$.
(b) γ induziert eine Kollineation von $\mathbf{P}(V)$.

3.5.4 Lemma. Sei $\sigma \in \Gamma_O$ beliebig und die Ordnung von $\mathbf{A}$ mindestens 3. Es gilt

$$\sigma(v + w) = \sigma(v) + \sigma(w) \quad \forall v, w \in V^*.$$

3.5.5 Satz. Jede Kollineation $\sigma \in \Gamma_O$ eines affinen Raums $\mathbf{A}$ der Ordnung ≥ 3 ist eine semilineare Selbstabbildung von V^*.

3.5.6 Korollar Sei $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder der Körper mit p Elementen ($p \geq 3$ prim). Dann sind alle Elemente aus Γ_O lineare Selbstabbildungen von V^*.

3.5.7 Zweiter Struktursatz für affine Räume. Sei $\mathbf{A} = \mathbf{P}/\mathbf{H}$ ein desarguesscher affiner Raum der Dimension ≥ 2 und der Ordnung ≥ 3 der durch den Vektorraum V^* über dem Schiefkörper K koordinatisiert ist. Dann gilt:

- Ist τ eine Translation und σ eine bijektive semilineare Selbstabbildung von V^*, so ist $\tau\sigma$ eine Kollineation von $\mathbf{A}$.
- Jede Kollineation α von $\mathbf{A}$ lässt sich so darstellen: $\alpha = \tau\sigma$ mit τ einer Translation und σ einer semilinearen Selbstabbildung von V^*.

3.5.9 Zweiter Struktursatz für projektive Räume. Sei $\mathbf{P}$ ein desarguesscher projektiver Raum der Dimension ≥ 2 und der Ordnung ≥ 3 und sei V ein Vektorraum mit $\mathbf{P} = \mathbf{P}(V)$. Dann wird jede Kollineation von $\mathbf{P}$ von einer bijektiven semilinearen Selbstabbildung von V induziert.

3.5.10 Korollar Sei K der zu $\mathbf{P}$ gehörige Körper. Ist $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder der Körper mit p Elementen ($p \geq 3$ prim), so wird jede Kollineation von $\mathbf{P}$ von einer linearen Abbildung von V induziert.